A feszítőfákból számolt súlyvektorok mértani közepének optimalitása a logaritmikus legkisebb négyzetes célfüggvényre nézve

Bozóki Sándor

MTA SZTAKI, Budapesti Corvinus Egyetem

Vitaliy Tsyganok

Laboratory for Decision Support Systems,
The Institute for Information Recording of National Academy of Sciences of Ukraine;

Department of System Analysis, State University of Telecommunications

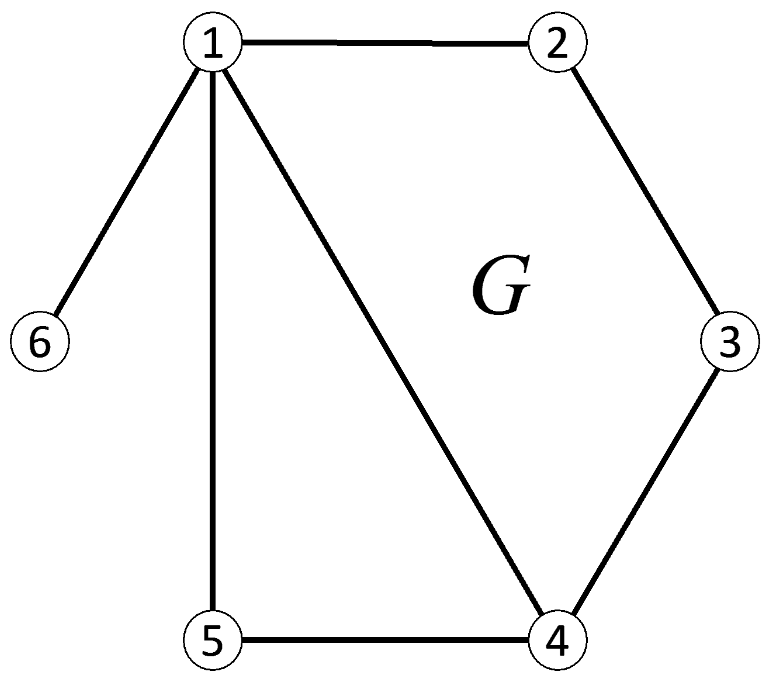
2017. június 15.

nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & & & \\ & a_{32} & 1 & a_{34} & & \\ a_{41} & & a_{43} & 1 & a_{45} & \\ a_{51} & & & a_{54} & 1 & \\ a_{61} & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix gráfja

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & & & \\ & a_{32} & 1 & a_{34} & & \\ a_{41} & & a_{43} & 1 & a_{45} & \\ a_{51} & & & a_{54} & 1 & \\ a_{61} & & & & & 1 \end{pmatrix}$$



A logaritmikus legkisebb négyzetek (LLS) módszere

$$\min \sum_{\substack{i,j:\\ a_{ij}\ \text{ismert}}} \left[\log a_{ij} - \log\left(\frac{w_i}{w_j}\right)\right]^2$$

$$w_i > 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Normalizálás: $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, vagy $\prod_{i=1}^{n} w_i = 1$, vagy $w_1 = 1$.

Tétel (Bozóki, Fülöp, Rónyai, 2010): Legyen $\mathbf{A}$ egy nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix, amely G gráfja összefüggő. Ekkor a logaritmikus legkisebb négyzetes feladat optimális megoldása ($\mathbf{w} = \exp \mathbf{y}$) egyértelmű és az alábbi egyenletrendszer megoldásaként adódik:

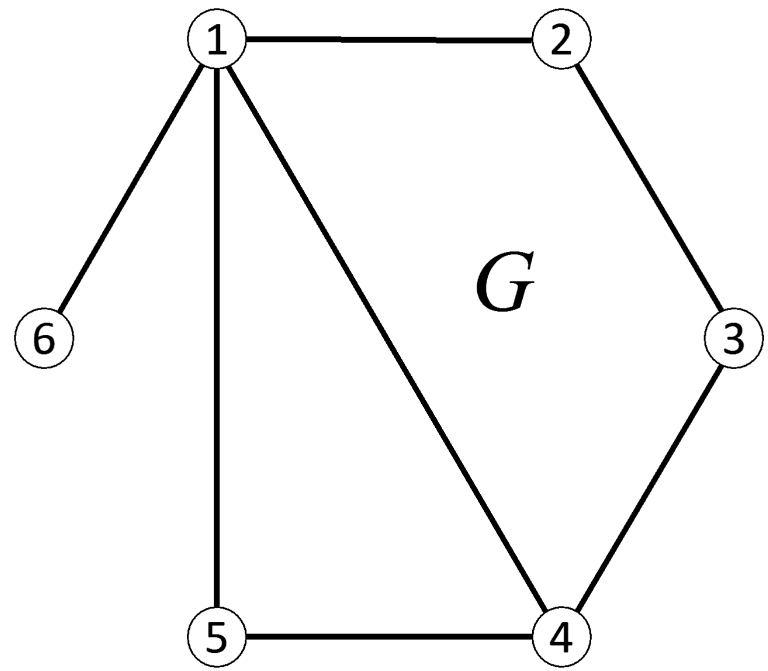
$$(\mathbf{Ly})_i = \sum_{k:e(i,k)\in E(G)} \log a_{ik} \qquad \text{minden } i = 1, 2, \ldots, n\text{-re},$$

$$y_1 = 0$$

ahol $\mathbf{L}$ a G gráf Laplace-mátrixa (ℓ_{ii} az i. csúcs foka és $\ell_{ij} = -1$ pontosan akkor, ha az i. és j. csúcsok szomszédosak).

példa

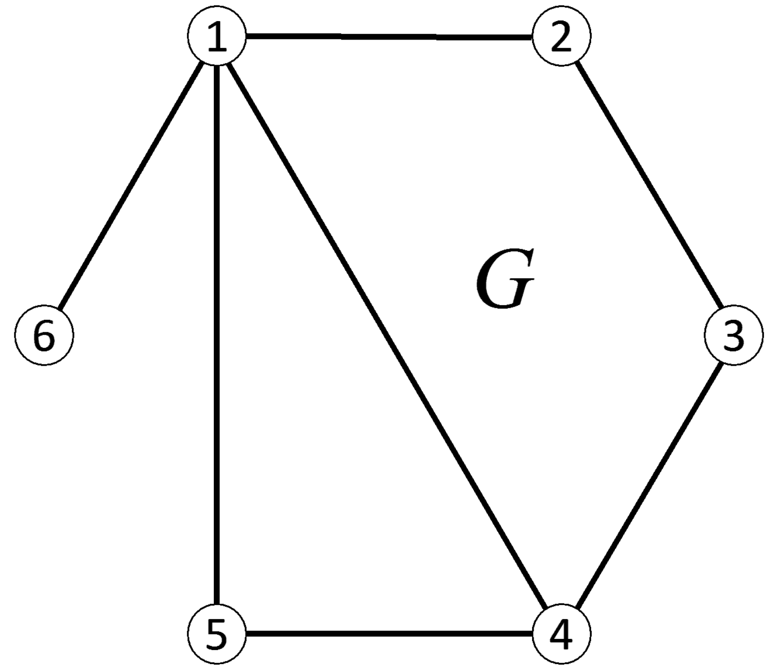
$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & & & \\ & a_{32} & 1 & a_{34} & & \\ a_{41} & & a_{43} & 1 & a_{45} & \\ a_{51} & & & a_{54} & 1 & \\ a_{61} & & & & & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(=0) \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log(a_{12}\, a_{14}\, a_{15}\, a_{16}) \\ \log(a_{21}\, a_{23}) \\ \log(a_{32}\, a_{34}) \\ \log(a_{41}\, a_{43}\, a_{45}) \\ \log(a_{51}\, a_{54}) \\ \log a_{61} \end{pmatrix}$$

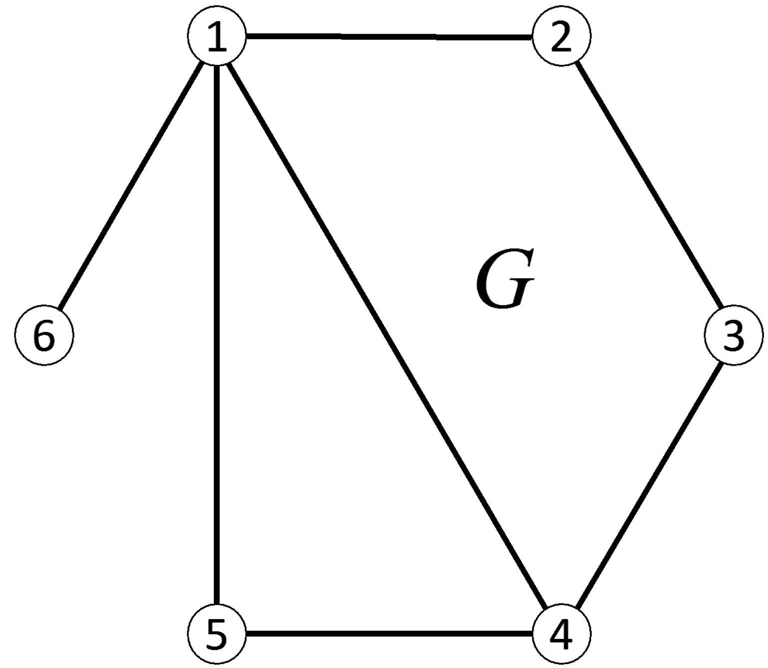
A feszítőfás megközelítés (Tsyganok, 2000, 2010)

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & & & \\ & a_{32} & 1 & a_{34} & & \\ a_{41} & & a_{43} & 1 & a_{45} & \\ a_{51} & & & a_{54} & 1 & \\ a_{61} & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

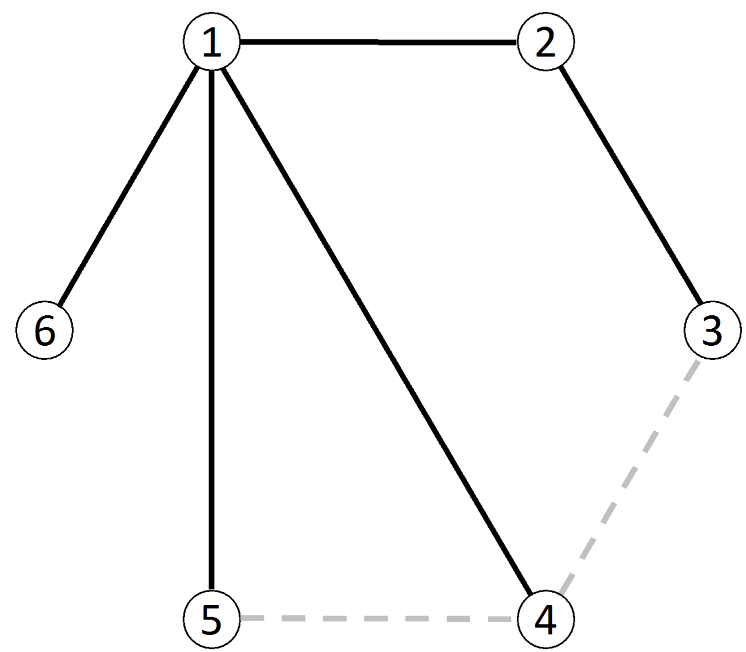


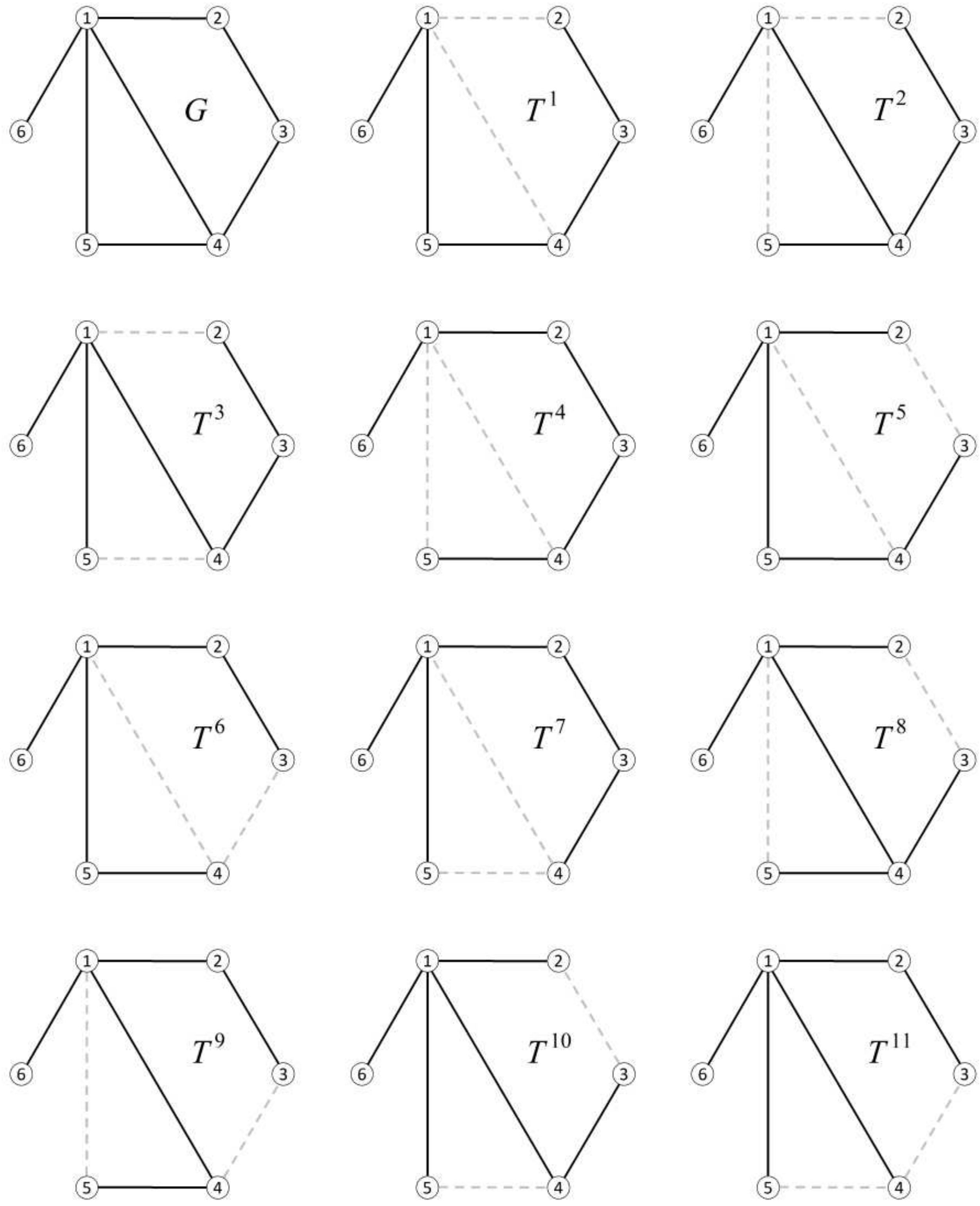
A feszítőfás megközelítés (Tsyganok, 2000, 2010)

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & & & \\ & a_{32} & 1 & a_{34} & & \\ a_{41} & & a_{43} & 1 & a_{45} & \\ a_{51} & & & a_{54} & 1 & \\ a_{61} & & & & & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & & & \\ & a_{32} & 1 & & & \\ a_{41} & & & 1 & & \\ a_{51} & & & & 1 & \\ a_{61} & & & & & 1 \end{pmatrix}$$




G
T 1
T 2
T 3
T 4
T 5
T 6
T 7
T 8
T 9
T 10
T 11

A feszítőfás megközelítés

Minden feszítőfa indukál egy súlyvektort.

A súlyvektorok – pl. számtani vagy mértani középpel történő – aggregálásával kapott súlyvektor is egy értelmes megoldása a súlyozási feladatnak.

Tétel (Lundy, Siraj, Greco, 2017): A teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix összes feszítőfájából számolt súlyvektor mértani közepe a logaritmikus legkisebb négyzetes feladat megoldása.

Tétel (Lundy, Siraj, Greco, 2017): A teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix összes feszítőfájából számolt súlyvektor mértani közepe a logaritmikus legkisebb négyzetes feladat megoldása.

Ugyanez igaz a nem teljesen kitöltött esetben is:

Tétel (Bozóki, Tsyganok): A teljesen vagy nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix összes feszítőfájából számolt súlyvektor mértani közepe a logaritmikus legkisebb négyzetes feladat megoldása.

bizonyítás

Jelölje $E(G)$ a G gráf éleinek halmazát, $e(i,j)$ pedig az $i.$ és a $j.$ csúcs között futó élt.

A G gráf feszítőfáit jelölje $T^1, T^2, \ldots, T^s, \ldots, T^S$, ahol S a feszítőfák száma. A T^s feszítőfa éleinek halmazát $E(T^s)$-sel jelöljük.

A T^s feszítőfából számolt súlyvektort $\mathbf{w}^s, s = 1, 2, \ldots, S,$ jelöli. $\mathbf{w}^s$ skalárral való szorzástól eltekintve egyértelmű. Feltehetjük, hogy $w_1^s = 1$.

Legyen továbbá $\mathbf{y}^s := \log \mathbf{w}^s,\ s = 1, 2, \ldots, S$ (elemenkénti logaritmus).

bizonyítás

Jelölje $\mathbf{w}^{LLS}$ a logaritmikus legkisebb négyzetes feladat optimális megoldását (a $w_1^{LLS} = 1$ normalizálással) és legyen $\mathbf{y}^{LLS} := \log \mathbf{w}^{LLS}$. Ekkor

$$\left(\mathbf{L}\mathbf{y}^{LLS}\right)_i = \sum_{k:e(i,k)\in E(G)} b_{ik} \qquad \text{minden } i = 1, 2, \ldots, n\text{-re,}$$

ahol $b_{ik} = \log a_{ik}$ minden $e(i,k) \in E(G)$ élre.

$b_{ik} = -b_{ki}$ minden $e(i,k) \in E(G)$ élre.

A tétel bizonyításához elég igazolni, hogy

$$\left(\mathbf{L}\frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\mathbf{y}^s\right)_i = \sum_{k:e(i,k)\in E(G)} b_{ik} \qquad \text{minden } i = 1, 2, \ldots, n\text{-re.}$$

bizonyítás

Nehézség: az egyes feszítőfákhoz tartozó Laplace-mátrixok különböznek a G gráf Laplace-mátrixától.

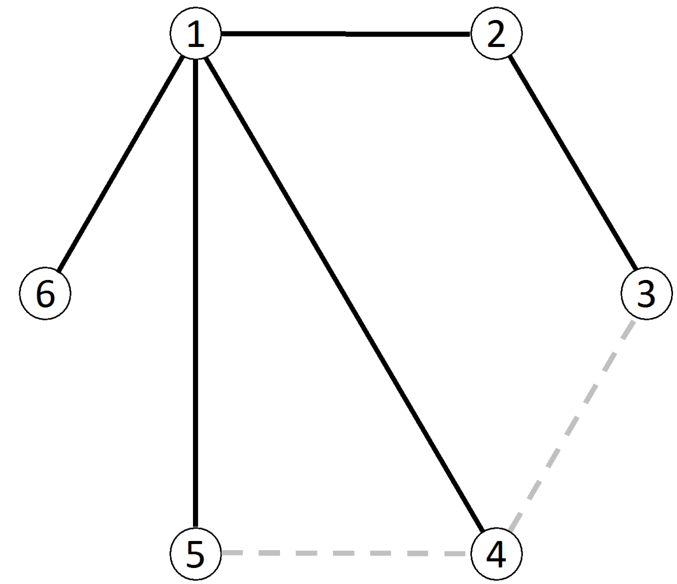
Tekintsünk egy tetszőleges T^s feszítőfát. Ekkor $\frac{w_i^s}{w_j^s} = a_{ij}$ minden $e(i,j) \in E(T^s)$ esetén.

Definiáljuk az $\mathbf{A}^s$ nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixot az alábbiak szerint:
$a_{ij}^s := a_{ij}$ minden $e(i,j) \in E(T^s)$-re és
$a_{ij}^s := \frac{w_i^s}{w_j^s}$ minden $e(i,j) \in E(G) \backslash E(T^s)$-re. Legyen most is
$b_{ij}^s := \log a_{ij}^s (= y_i^s - y_j^s)$.

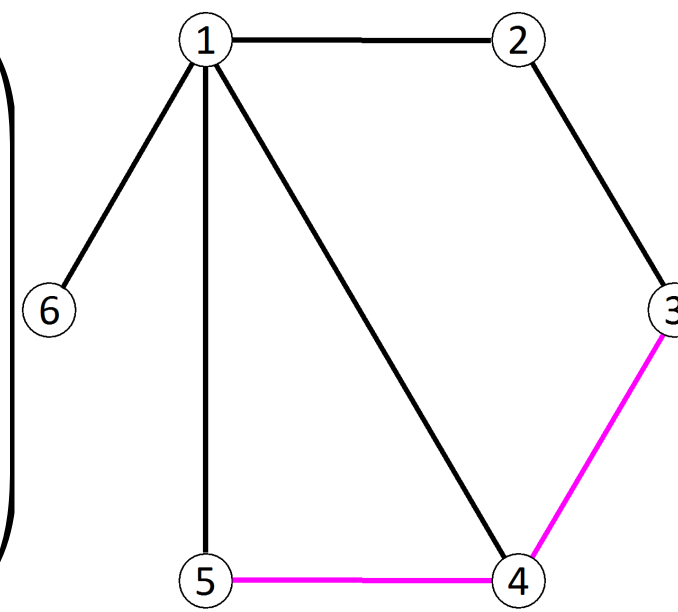
Vegyük észre, hogy az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}^s$ nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok Laplace-mátrixai megegyeznek.

bizonyítás

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & & & \\ & a_{32} & 1 & & & \\ a_{41} & & & 1 & & \\ a_{51} & & & & 1 & \\ a_{61} & & & & & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & & & \\ & a_{32} & 1 & a_{32}a_{21}a_{14} & & \\ a_{41} & & a_{41}a_{12}a_{23} & 1 & a_{41}a_{15} & \\ a_{51} & & & a_{51}a_{14} & 1 & \\ a_{61} & & & & & 1 \end{pmatrix}$$



bizonyítás

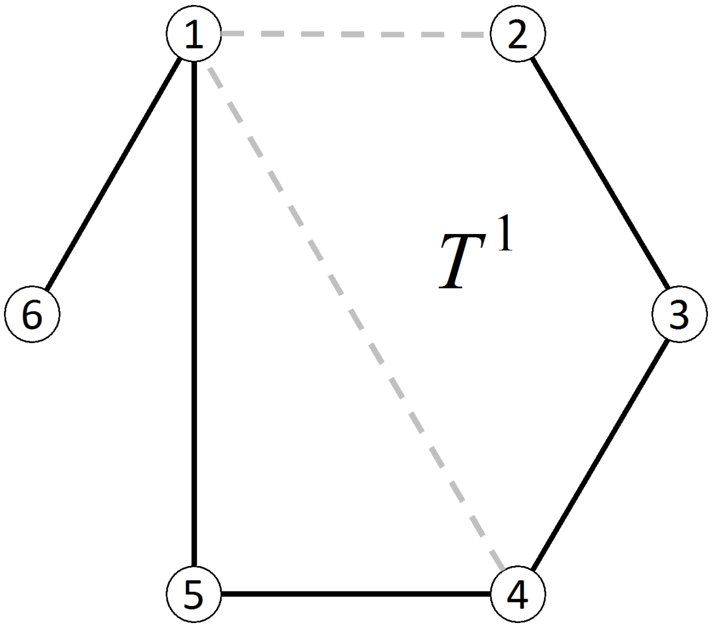
Mivel a T^s feszítőfa a $\mathbf{w}^s$ súlyvektort indukálja, ez utóbbi egyúttal az $\mathbf{A}^s$ nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixszal felírt logaritmikus legkisebb négyzetes feladat optimális megoldása is. Teljesül tehát az alábbi egyenletrendszer:

$$(\mathbf{L}\mathbf{y}^s)_i = \sum_{k:e(i,k)\in E(T^s)} b_{ik} + \sum_{k:e(i,k)\in E(G)\setminus E(T^s)} b^s_{ik} \quad \forall i = 1,\ldots,n\text{-re.}$$

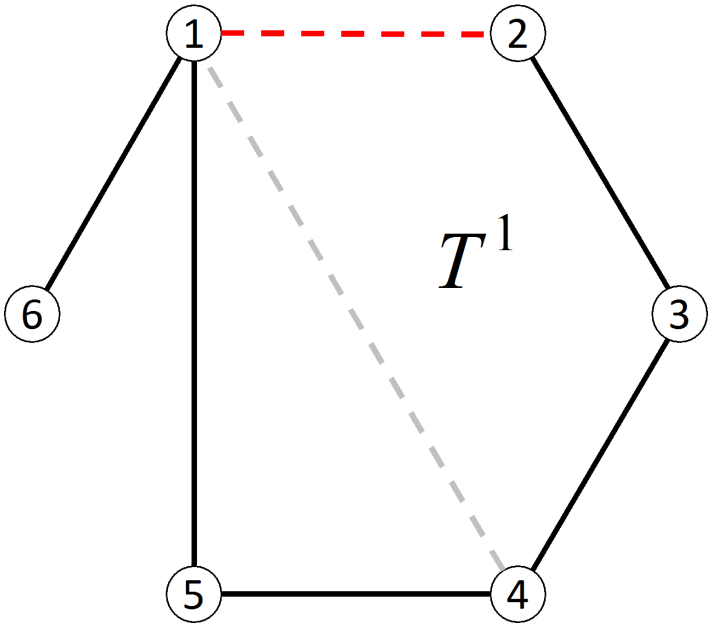
Lemma: Minden $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén

$$\sum_{s=1}^{S} \left(\sum_{k:e(i,k)\in E(T^s)} b_{ik} + \sum_{k:e(i,k)\in E(G)\setminus E(T^s)} b^s_{ik} \right) = S \sum_{k:e(i,k)\in E(G)} b_{ik}$$

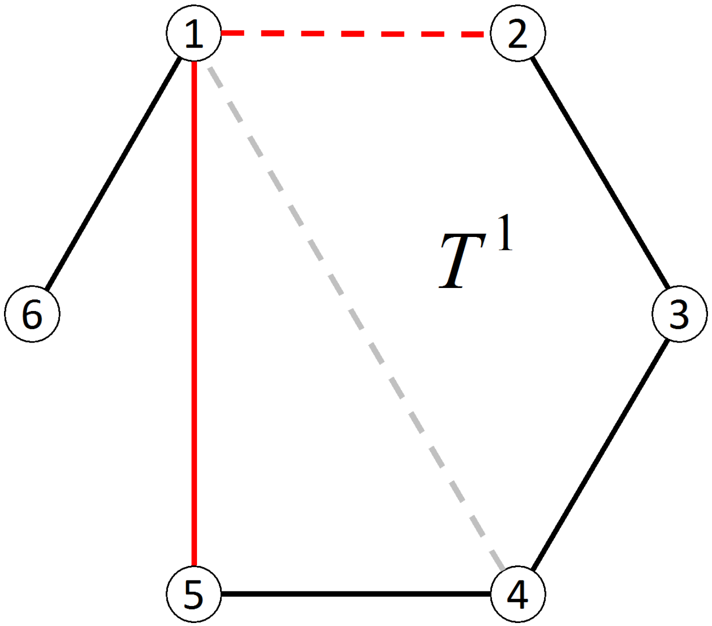
a lemma bizonyítása



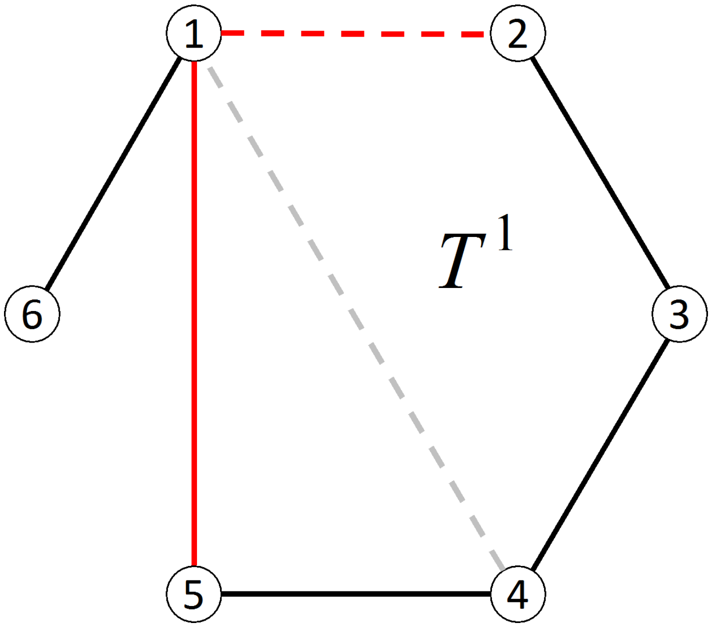
a lemma bizonyítása



a lemma bizonyítása

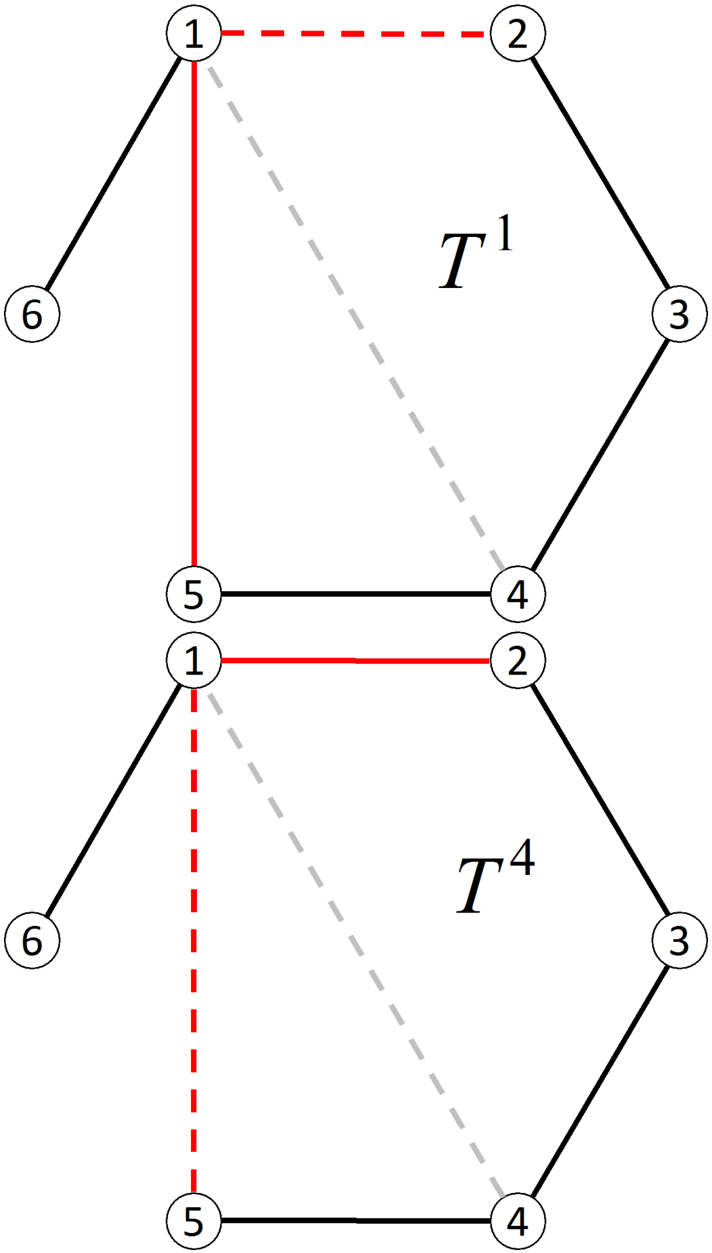


a lemma bizonyítása



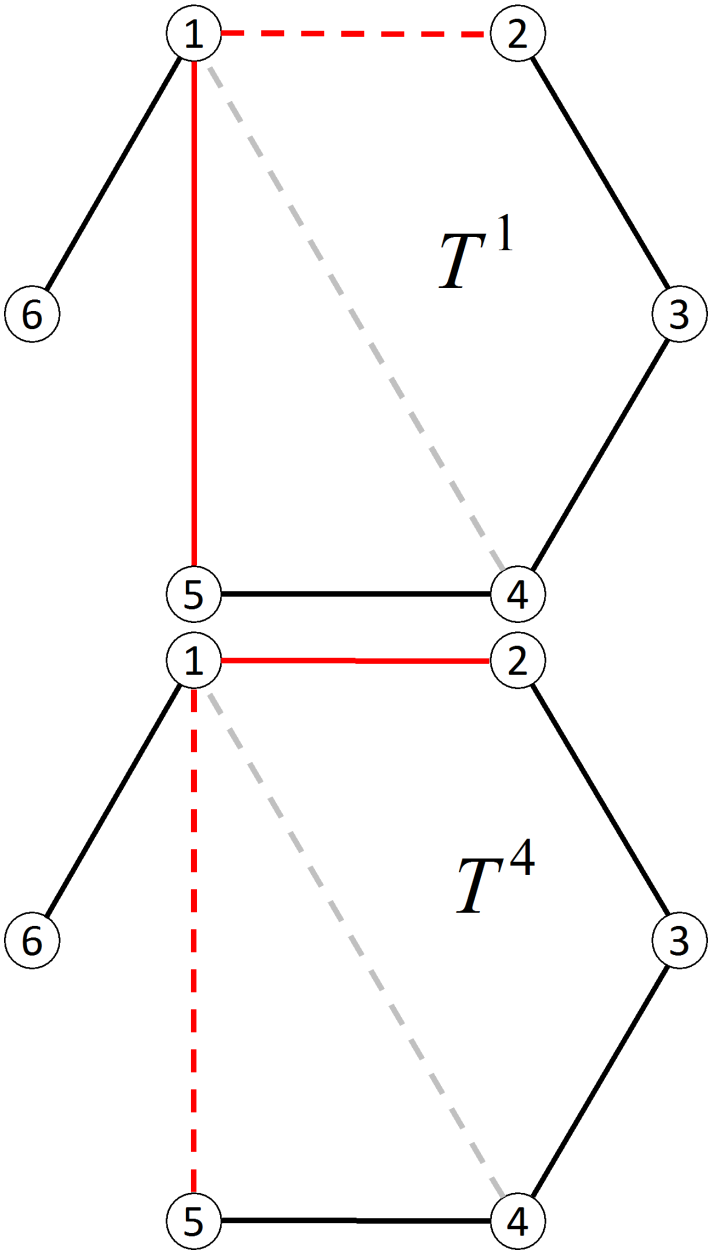
$$b_{12}^{1} = b_{15} + b_{54} + b_{43} + b_{32}$$

a lemma bizonyítása



$$b^1_{12} = b_{15} + b_{54} + b_{43} + b_{32}$$

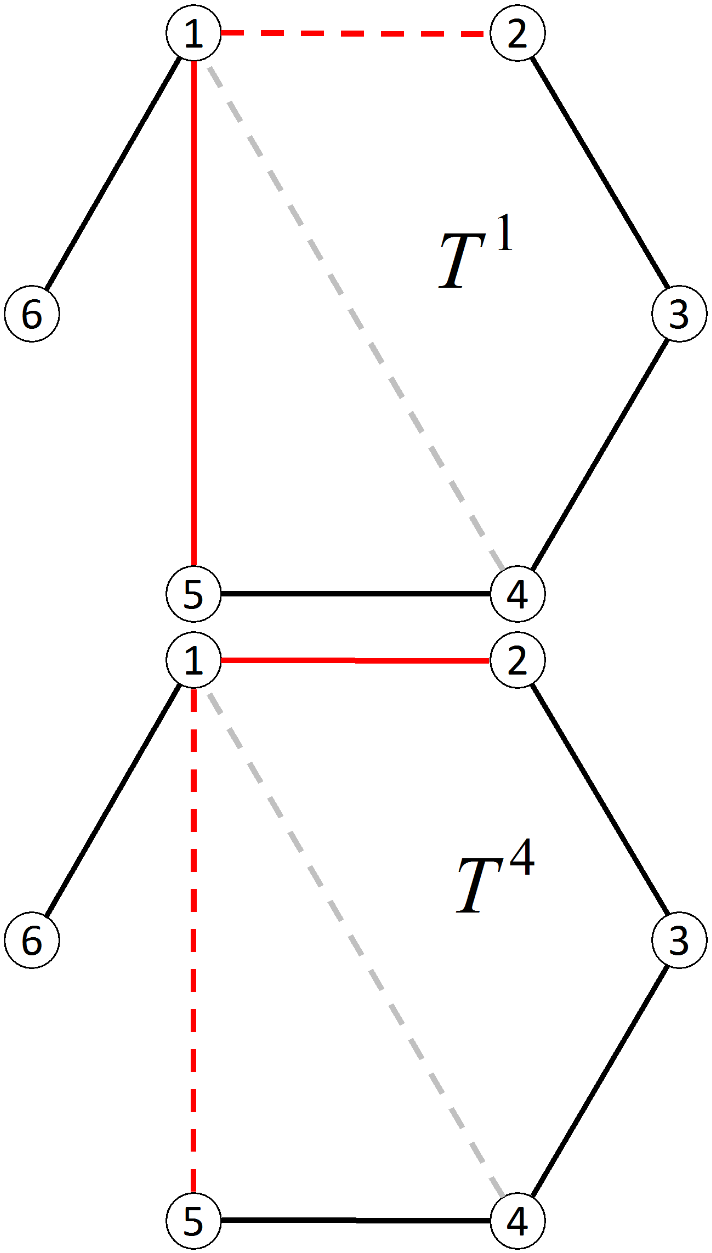
a lemma bizonyítása



$$b^1_{12} = b_{15} + b_{54} + b_{43} + b_{32}$$

$$b^4_{15} = b_{12} + b_{23} + b_{34} + b_{45}$$

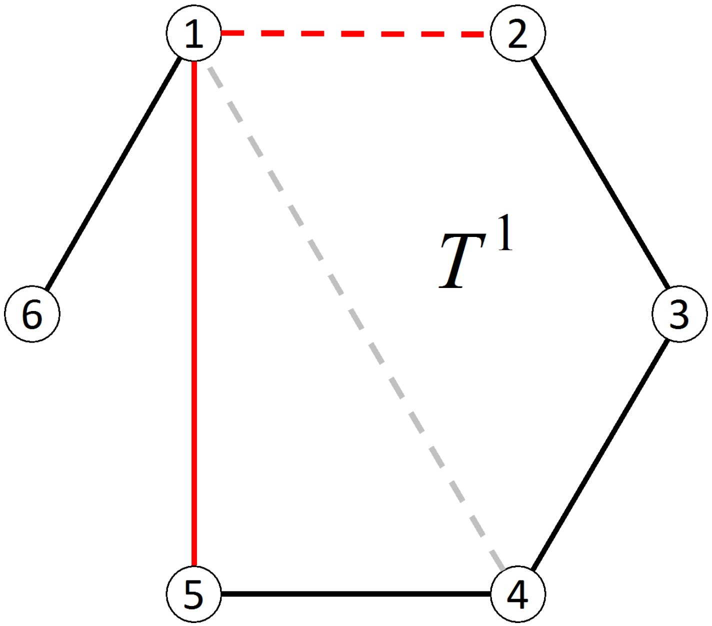
a lemma bizonyítása



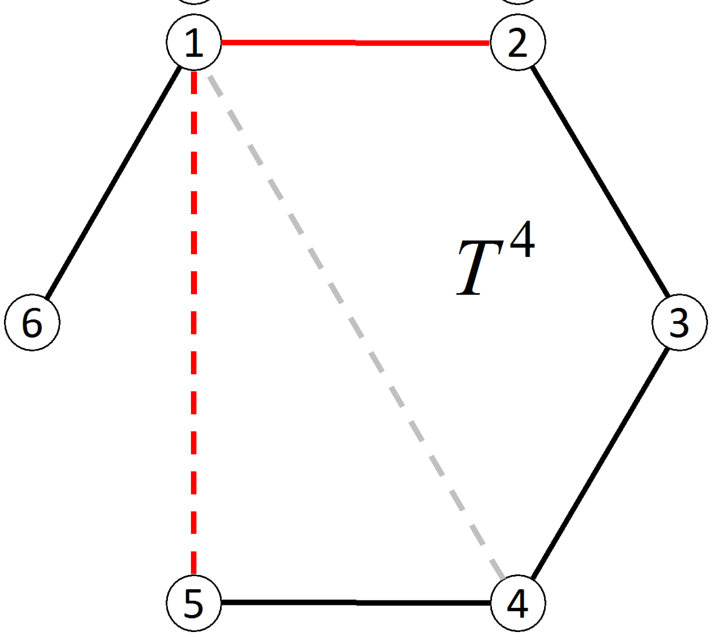
$$b^1_{12} = b_{15} + b_{54} + b_{43} + b_{32}$$

$$b^4_{15} = b_{12} + b_{23} + b_{34} + b_{45}$$

a lemma bizonyítása



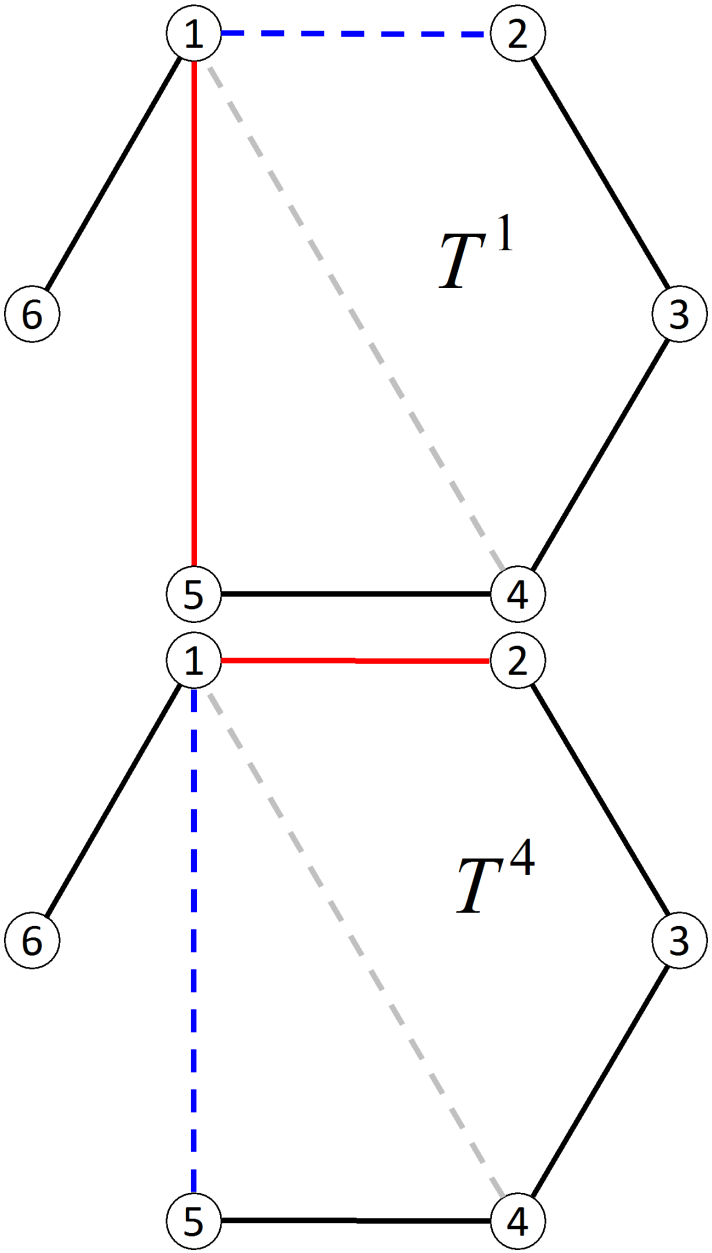
$$b^1_{12} = b_{15} + b_{54} + b_{43} + b_{32}$$



$$b^4_{15} = b_{12} + b_{23} + b_{34} + b_{45}$$

$$b^1_{12} + b^4_{15} = b_{12} + b_{15}$$

a lemma bizonyítása

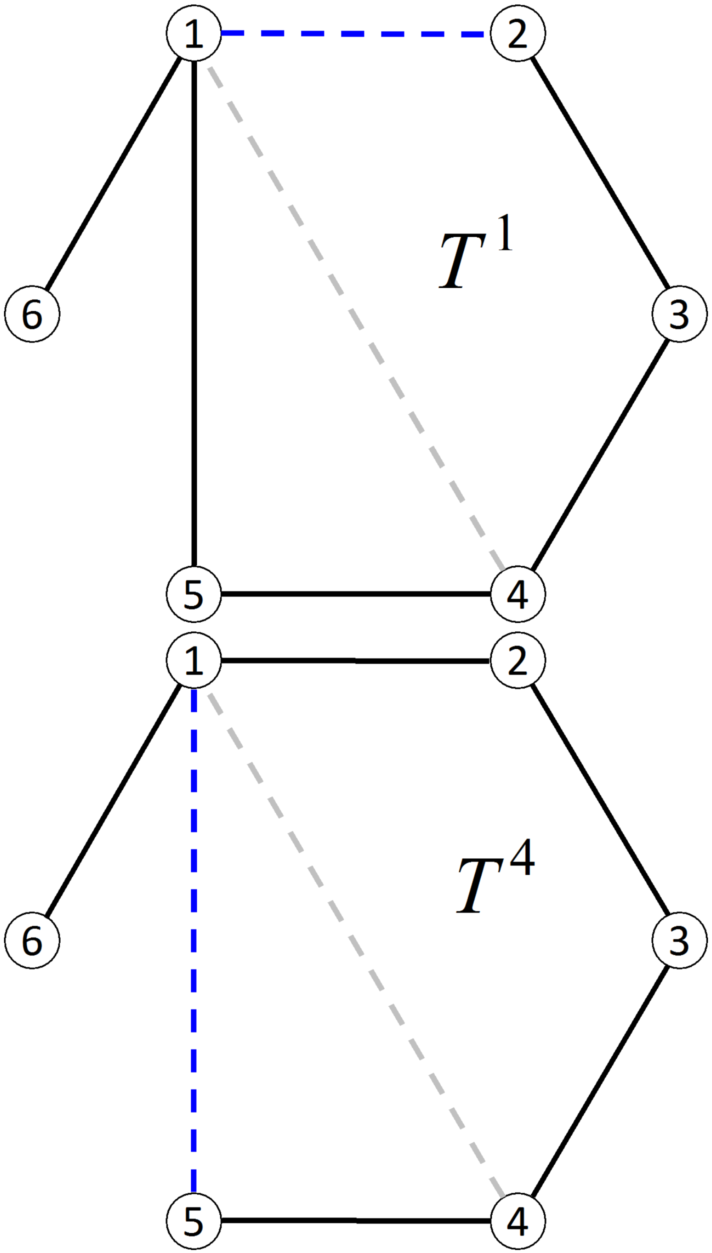


$$b_{12}^1 = b_{15} + b_{54} + b_{43} + b_{32}$$

$$b_{15}^4 = b_{12} + b_{23} + b_{34} + b_{45}$$

$$b_{12}^1 + b_{15}^4 = b_{12} + b_{15}$$

a lemma bizonyítása



$$b^1_{12} = b_{15} + b_{54} + b_{43} + b_{32}$$

$$b^4_{15} = b_{12} + b_{23} + b_{34} + b_{45}$$

$$b^1_{12} + b^4_{15} = b_{12} + b_{15}$$

bizonyítás

A tétel bizonyításához vegyük az alábbi egyenletek összegét $s = 1, 2, \ldots, S$-re:

$$(\mathbf{L}\mathbf{y}^s)_i = \sum_{k:e(i,k)\in E(T^s)} b_{ik} + \sum_{k:e(i,k)\in E(G)\setminus E(T^s)} b^s_{ik} \quad \forall i = 1, \ldots, n\text{-re}$$

és alkalmazzuk a lemmát:

$$\sum_{s=1}^{S} \left(\sum_{k:e(i,k)\in E(T^s)} b_{ik} + \sum_{k:e(i,k)\in E(G)\setminus E(T^s)} b^s_{ik} \right) = S \sum_{k:e(i,k)\in E(G)} b_{ik}$$

$$\mathbf{y}^{LLS} = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^{S} \mathbf{y}^s. \qquad \square$$

Megjegyzés: A fenti bizonyítás a teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixokat ($S = n^{n-2}$) speciális esetként tartalmazza.

Konklúzió

Megmutattuk két súlyozási módszer ekvivalenciáját.

Főbb hivatkozások időrendi sorrendben 1/2

Tsyganok, V. (2000): Combinatorial method of pairwise comparisons with feedback, Data Recording, Storage & Processing 2:92–102 (ukrán nyelven).

Tsyganok, V. (2010): Investigation of the aggregation effectiveness of expert estimates obtained by the pairwise comparison method, Mathematical and Computer Modelling, 52(3-4) 538–54

Siraj, S., Mikhailov, L., Keane, J.A. (2012): Enumerating all spanning trees for pairwise comparisons, Computers & Operations Research, 39(2) 191–199

Siraj, S., Mikhailov, L., Keane, J.A. (2012): Corrigendum to “Enumerating all spanning trees for pairwise comparisons [Comput. Oper. Res. 39(2012) 191-199]”, Computers & Operations Research, 39(9) page 2265

Főbb hivatkozások időrendi sorrendben 2/2

Lundy, M., Siraj, S., Greco, S. (2017): The mathematical equivalence of the “spanning tree” and row geometric mean preference vectors and its implications for preference analysis, European Journal of Operational Research 257(1) 197–208

Bozóki, S., Tsyganok, V. ($\geq$ 2017) The logarithmic least squares optimality of the geometric mean of weight vectors calculated from all spanning trees for (in)complete pairwise comparison matrices. *Bírálat alatt,* https://arxiv.org/abs/1701.04265

Köszönöm.

bozoki.sandor@sztaki.mta.hu

http://www.sztaki.mta.hu/$\sim$bozoki