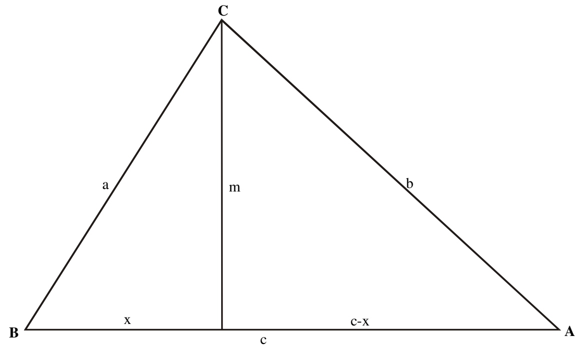
Pitagorasz tételének általánosítása n-dimenzióra

Ajánlom ezt az írást Lázárné Kántor Irénnek, a kolozsvári Báthory István Líceum volt matematika tanárának és igazgatójának, aki bevezetett a matematika izgalmas és szépséges világába.

1. Segédtétel:

Az ábra jelöléseit használva és a háromszög területét S-sel jelölve:



$$\underline{16S^2 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4}$$

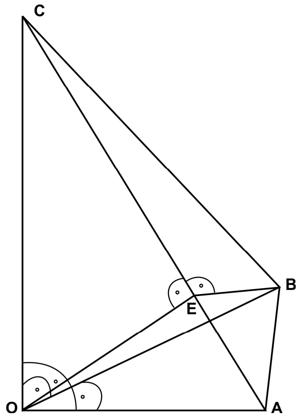
<u>Bizonyítás:</u>

$a^2 - x^2 = b^2 - (c - x)^2 = m^2 \quad \Rightarrow \quad 2cx = a^2 - b^2 + c^2$
másfelől,
$m^2 = a^2 - x^2$ és $4S^2 = m^2c^2$
a kettőt összevetve majd behelyettesítve:
$16S^2 = 4m^2c^2 = 4a^2c^2 - 4c^2x^2 = 4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2 = 4a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 - 2c^2a^2 =$
$= 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4$, amit bizonyítani akartunk.

Kicsit átalakítva:
$16S^2 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 - b^4 - (a^4 - 2c^2a^2 + c^4) =$
$= 2a^2b^2 + 2b^2c^2 - b^4 - (a^2 - c^2)^2$

2. Segédtétel:

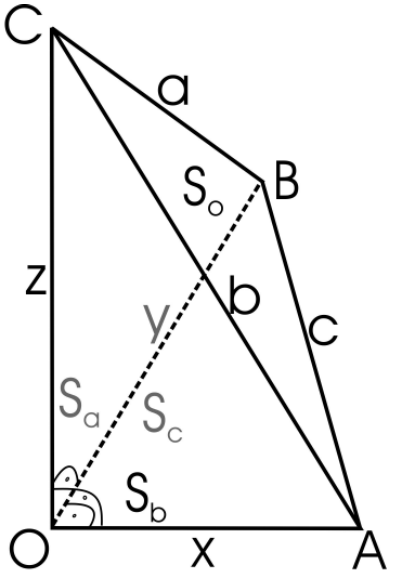
Egy derékszögű tetraéder (OABC) derékszögű csúcsából (O) valamely átellenes élre (pl. AC) bocsátott merőleges talppontja (E) megegyezik az éllel szemközti másik csúcsból (B) ezen élre (AC) bocsátott merőleges talppontjával (E).
OB merőleges az OAC síkra, így a benne levő AC egyenesre is (a három merőleges tétele).
OE merőleges AC-re (így határoztuk meg).
Ezért AC merőleges az BOE síkra, tehát a benne található BE egyenesre is,
azaz E lesz B-ből AC-ra bocsátott merőleges talppontja is.



Pitagorasz tételének háromdimenziós változata

Egy derékszögű tetraéder „befogó-lapjainak” négyzetösszege megegyezik az „átfogó-lapjának” négyzetével.

A „befogó-lapok”: a derékszög melletti háromszögek, az „átfogó-lap”: a derékszöggel szemközti lap, egy lap négyzete: területének négyzete.



$$S_0{}^2 = S_a{}^2 + S_b{}^2 + S_c{}^2$$

Jelölések:

S_a : az OBC háromszög területe
S_b : az OCA háromszög területe
S_b : az OAB háromszög területe
S_o : az ABC háromszög területe
OA = x, OB = y, OC = z, BC = a, CA = b, AB = c

Bizonyítás:

Belátható, hogy:
$4S_a{}^2 = y^2z^2$, $4S_b{}^2 = z^2x^2$, $4S_c{}^2 = x^2y^2$, $a^2 = y^2 + z^2$, $b^2 = z^2 + x^2$, $c^2 = x^2 + y^2$

Az *1. Segédtétel* alapján:
$16S_o{}^2 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4$

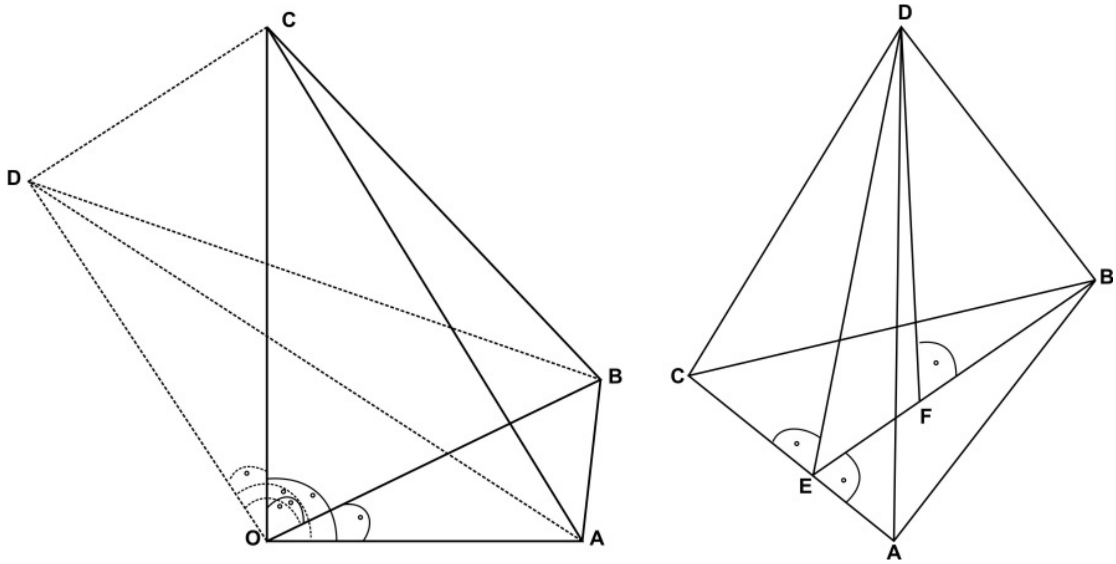
Behelyettesítve:
$16S_o{}^2 = 2(y^2 + z^2)(z^2 + x^2) + 2(z^2 + x^2)(x^2 + y^2) + 2(x^2 + y^2)(y^2 + z^2) - (y^2 + z^2)^2 - (z^2 + x^2)^2 - (x^2 + y^2)^2 =$
$= 2y^2z^2 + 2y^2x^2 + 2z^4 + 2z^2x^2 + 2z^2x^2 + 2z^2y^2 + 2x^4 + 2x^2y^2 + 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^4 + 2y^2z^2 -$
$- y^4 - 2y^2z^2 - z^4 - z^4 - 2z^2x^2 - x^4 - x^4 - 2x^2y^2 - y^4 = 4y^2z^2 + 4z^2x^2 + 4x^2y^2 =$
$= 4(4S_a{}^2) + 4(4S_b{}^2) + 4(4S_c{}^2)$

Tehát: $S_o{}^2 = S_a{}^2 + S_b{}^2 + S_c{}^2$, q.e.d.

Pitagorasz tételének négydimenziós változata

Egy négydimenziós derékszögű „penta-éder” „háromdimenziós befogóinak” négyzetösszege megegyezik a „háromdimenziós átfogó” négyzetével.

A „háromdimenziós befogók” a négy derékszögű tetraéder, a „háromdimenziós átfogó” a derékszöggel szemközti tetraéder. A térfogatok négyzeteire vonatkozik a tétel. A négydimenziós „penta-éder” azt jelenti, hogy öt tetraéder határolja e négydimenziós testet.



OA, OB, OC, OD páronként merőlegesek egymásra.
Ez csak úgy lehetséges, ha D a negyedik dimenzióban található. A tétel állítása:

$V^2_{OABC} + V^2_{OABD} + V^2_{OACD} + V^2_{OBCD} = V^2_{ABDC}$

$OA = a, OB = b, OC = c, OD = d$ =>
$AB^2 = a^2 + b^2$, $AC^2 = a^2 + c^2$, $AD^2 = a^2 + d^2$, $BC^2 = b^2 + c^2$, $BD^2 = b^2 + d^2$, $CD^2 = c^2 + d^2$
(mivel a hat O*XY* háromszög mindegyike derékszögű)
E az O-ból CA-ra bocsátott magasság talppontja. A 2. segédtétel alapján, B-ből CA-ra bocsátott magasság talppontja is E (OABD derékszögű tetraéder). Hasonlóan a D-ből CA-ra bocsátott magasság talppontja is E (OADC derékszögű tetraéder).
$DF * EB = 2S_{EBD}$, $2S_{ABC} = AC * EB$ => $S_{ABC} * DF = S_{EBD} * AC$
$36V^2_{ABDC} = 4S^2_{ABC} * DF^2 = 4S^2_{EBD} * AC^2 = 4S^2_{EBD} * (a^2 + c^2)$
Kiszámolandó S^2_{EBD}
$BD^2 = b^2 + d^2$
$EB^2 = 4S^2_{ABC} / AC^2 = (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) / (a^2 + c^2)$ (lásd a háromdimenziós Pitagorasz-tételt)
$ED^2 = 4S^2_{ADC} / AC^2 = (a^2d^2 + a^2c^2 + d^2c^2) / (a^2 + c^2)$ (lásd a háromdimenziós Pitagorasz-tételt)
Az EBD háromszögre alkalmazva az előző segédtétel módosított változatát:
$16S^2_{EBD} * (a^2 + c^2) = 2(a^2d^2 + a^2c^2 + d^2c^2)(b^2 + d^2) + 2(b^2 + d^2)(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (b^2 + d^2)^2(a^2 + c^2) -$
$- ((a^2d^2 + a^2c^2 + d^2c^2) - (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2))^2 / (a^2 + c^2) =$
$= 2(a^2d^2 + a^2c^2 + d^2c^2)(b^2 + d^2) + 2(b^2 + d^2)(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (b^2 + d^2)^2(a^2 + c^2) -$
$- ((a^2 + c^2)(d^2 - b^2))^2/(a^2 + c^2) =$
$= 2a^2d^2b^2 + 2a^2c^2b^2 + 2d^2c^2b^2 + 2a^2d^2d^2 + 2a^2c^2d^2 + 2d^2c^2d^2 + 2b^2a^2b^2 + 2b^2a^2c^2 + 2b^2b^2c^2 + 2d^2a^2b^2 +$
$+ 2d^2a^2c^2 + 2d^2b^2c^2 - (b^2 + d^2)^2(a^2 + c^2) - (a^2 + c^2)(b^2 - d^2)^2 =$
$= 4a^2b^2d^2 + 4a^2b^2c^2 + 4a^2c^2d^2 + 4b^2c^2d^2 + 2a^2d^4 + 2c^2d^4 + 2b^4a^2 + 2b^4c^2 - (2b^4 + 2d^4)(a^2 + c^2) =$
$= 4*36 * (V^2_{OABD} + V^2_{OABC} + V^2_{OACD} + V^2_{OBCD})$
tehát $4S^2_{EBD} * (a^2 + c^2) = 36 (V^2_{OABC} + V^2_{OABD} + V^2_{OACD} + V^2_{OBCD})$
azaz $V^2_{OABC} + V^2_{OABD} + V^2_{OACD} + V^2_{OBCD} = V^2_{ABDC}$, q.e.d.

Pitagorasz tételének n-dimenziós változata

A következőkben az n-dimenziós változatot ismertetjük, értelmezzük és bizonyítjuk.

A 3 dimenziós tetraédernek n-dimenziós változatát az O, A_1, A_2,...A_n pontok határozzák meg.
Ezt az n-dimenziós testet, hívjuk „(n+1)-éder"-nek, n darab (n-1)-dimenziós derékszögű „n-éder" ($OA_1A_2...A_{n-1}$, $OA_2A_3...A_n$,...) és egy általános (n-1)-dimenziós ($A_1A_2...A_n$, nem derékszögű) „n-éder" határolja. Az előzők (n-1)-dimenziós térfogatát hívjuk befogóknak, az utóbbi (n-1)-dimenziós térfogatát hívjuk átfogóknak. Ekkor a tétel ugyanúgy hangzik:
A befogók négyzetének összege megegyezik az átfogó négyzetével.

A többdimenziós testek térfogata

Elfogadható, hogy egy n-dimenziós kocka térfogata a^n.
Egy ilyen kocka n darab egybevágó n-dimenziós „gúlára" bontható, (hasonlóan ahogy egy 3 dimenziós kocka 3 egybevágó gúlára bontható). E „gúlák" „alapjai" (n-1)-dimenziós kockák, melyeknek van egy közös O pontjuk, csúcsaik pedig az O-val átellenes pont. (Ha egységnyi élű kockát veszünk, pl. O koordinátái lehetnek (0,0,..,0), akkor az átellenes ponté (1,1,..,1), azaz koordinátáik maximális (n) Hamming távolságra vannak egymástól.) Egy ilyen „n-dimenziós gúla" térfogata tehát az n-dimenziós kocka térfogatának n-ed része. Ebből könnyen levezethető, hogy bármilyen „n-dimenziós gúla" térfogata n-ed része az (n-1) dimenziós alapja térfogatának és magasságának szorzatának. (E magasság fogalma ortogonális n-dimenziós gúla esetén triviális, amikor nem lesz az, majd részletezzük.)
Ezekből az is könnyen belátható, hogy az n-dimenziós derékszögű „(n+1)-éder" térfogata $a_1*a_2*...*a_n/n!$, ahol $a_1,a_2,...,a_n$ a derékszögből kiinduló élek hossza.

Bizonyítás

A bizonyítást teljes indukcióval végezzük. A tételt (n-1)-ig bizonyítottnak feltételezzük, erre alapozva igazoljuk n-re is. (n=2-re Pitagorasz bizonyította, ez már elég is lenne, 3 és 4-re csak az érdekesség kedvéért bizonyítottuk.)

Az O, A_1, A_2,...A_n pontok határozzák meg az n-dimenziós derékszögű „(n+1)-éder"-t.
E pontok koordinátái legyenek (0,0,..,0), (a_1,0,..,0), (0,a_2,..,0),..,(0,0,..,0,a_n).
Az n darab (n-1)-dimenziós derékszögű „n-éder"-eket meghatározó ponthalmazokat úgy kapjuk meg, hogy az (n+1) ponthalmazból az O kivételével rendre elhagyunk egyet, ezek térfogatai lesznek az (n-1)-dimenziós befogók. Az „átfogó" az A_1, A_2,...A_n pontok által meghatározott (n-1)-dimenziós (nem-derékszögű) „n-éder" térfogata.

A $\mathbf{P}a=a_1*a_2*...*a_n$ jelölést alkalmazva, az előzőek alapján belátható, hogy az **i**-dik (n-1)-dimenziós befogó $\mathbf{P}a/a_i/(n-1)!$

Az (n-1)-dimenziós (nem-derékszögű) „n-éder"-t úgy tekintjük, mint aminek A_1, A_2,...A_{n-1} pontok által meghatározott (n-2)-dimenziós (n-1)-éder az „alapja", és A_n a csúcsa. E test magassága az A_n pont távolsága az „alaptól". Ez két egymásra merőleges szakaszból áll: az OA_n valamint az O távolsága az A_1, A_2,...A_{n-1} pontok által meghatározott (n-2)-dimenziós (n-1)-édertől („alaptól"). Az O, A_1, A_2,...A_{n-1} pontokra igaznak feltételeztük a tételt, ezt alapján az „alap" térfogatának négyzete:
$V^2_{n-2}=\mathbf{P}a^2/a_n^2*(1/a_1^2+1/a_2^2+...+1/a_{n-1}^2)/((n-2)!)^2$
Ezt megszorozva az „alap" O-tól való távolságának négyzetével (m_o^2) és osztva $(n-1)^2$-tel, az $OA_1A_2...A_{n-1}$ tetraéder térfogatának négyzetét kapjuk (V^2_{n-1}), ebből számoljuk ki az „alap" O-tól való távolságának négyzetét:
$V^2_{n-2}*m_o^2/(n-1)^2=V^2_{n-1}$
$m_o^2=V^2_{n-1}*(n-1)^2/ V^2_{n-2}=\mathbf{P}a^2/a_n^2/((n-1)!)^2*(n-1)^2/(\mathbf{P}a^2/a_n^2*(1/a_1^2+1/a_2^2+...+1/a_{n-1}^2)/((n-2)!)^2)$
$m_o^2=1/(1/a_1^2+1/a_2^2+...+1/a_{n-1}^2)$ (érdekes eredmény...)
így az A_n pont „alaptól" vett távolságának négyzete: $m^2=m_o^2+a_n^2$
Ebből az „átfogó" négyzete:
$V^2(A_1A_2...A_n)=m^2*V^2_{n-2}/(n-1)^2=$
$=(1/(1/a_1^2+1/a_2^2+...1/a_{n-1}^2)+a_n^2)*\mathbf{P}a^2/a_n^2*(1/a_1^2+1/a_2^2+...+1/a_{n-1}^2)/((n-2)!)^2/(n-1)^2=$
$=(\mathbf{P}a^2/a_n^2+\mathbf{P}a^2/a_1^2+\mathbf{P}a^2/a_2^2+...+\mathbf{P}a^2/a_{n-1}^2)/((n-1)!)^2$
ami tulajdonképpen a fent említett „befogók" négyzeteinek összege, q.e.d.

Megjegyzések:

Ha az n-dimenziós „testet” határoló (n-1)-dimenziós „felületeket” a rájuk „merőleges”, mértékükkel arányos vektorral ábrázoljuk, akkor e vektorok összege természetszerűen zérus (hisz a felület zárt). Derékszögű tetraéder esetén n vektor (a „befogóké”) páronként merőleges egymásra, így ezek eredőjének a nagysága a négyzetösszegük gyöke. Az eredő nagysága az „átfogóval” megegyező, iránya meg azzal ellentétes kell legyen, hogy a vektorösszeg nullát eredményezzen. Így kicsit egyszerűbben jutunk ugyanarra az eredményre.

Mivel e speciális poliéderek az összes csúcskombinációt tartalmazzák, a csúcsok, élek, lapok, ... (n-1)-dimenziós n-éderek rendre a kombinációs számok. Így ezek összege (a teljes testet meg az üreshalmazt leszámítva) 2^{n+1}-2, váltakozó előjellel összegezve pedig $1-(-1)^{n+1}$, azaz páros dimenziójú test esetén 0, páratlanéban pedig 2. Ez utóbbi nem más, mint az Euler-féle poliédertétel (c-é+l=2) általánosítása. A nem ilyen típusú n-dimenziós testekre ezekből az (n+1)-éderek-ből indulhatunk ki (pl. ha egy háromszöget sokszöggé alakítunk, ugyanannyival nő a csúcsok száma, mint az éleké, ha pedig egy új pontot egy m oldalú lap csúcsaival kötünk össze, az m-lap helyett m új lap és m új él keletkezik, stb.)

Érdekes lenne a 3-dimenziós tétel ábrázolása az eredeti tételhez hasonlóan (négyzetek az oldalakon). Mivel itt területek négyzeteit kéne ábrázolni, 3 dimenzióban is csak ezek vetületei jöhetnek szóba...

A 3-dimenziós változatnak sok esetben gyakorlati haszna is van, nekem többször is egyszerűsített bizonyos számításokat.

Az első ötlet és bizonyítás 1987(?) őszén született. 1993 körül nekiláttam számítógépbe bevinni, aztán más teendők miatt félretettem. 2009. év végén Böröcz Nándor megkért, olvassam át egy matematikával foglalkozó érdekes kéziratát. Ennek hatására tértek vissza gondolataim a matematikához, és fejeztem be ezen iromány begépelését. Az ellenőrizetlen változat 2010. január 14-én lett kész Budapesten.

Méder István

ui:

Pár nappal később nekiálltam ezen írást angolra fordítani. Mivel az angol matematikai kifejezéseket nem ismerem, sokat keresgettem az Interneten. E közben bukkantam erre:

de Gua's Theorem:

“The square of the area of the base (i.e., the face opposite the right trihedral angle) of a trirectangular tetrahedron is equal to the sum of the squares of the areas of its other three faces.

This theorem was presented to the Paris Academy of Sciences in 1783 by J. P. de Gua de Malves.”

Szóval a háromdimenziós változat ismert, a továbbiak viszont nem…