Elfogadható inkonzisztenciájú páros összehasonlítás mátrixokkal kapcsolatos konvexitási tulajdonságok és azok alkalmazásai

Bozóki Sándor, Fülöp János, Poesz Attila

Megjelent: Solymosi Tamás – Temesi József (szerk.): Egyensúly és optimum. Tanulmányok Forgó Ferenc 70. születésnapjára. Aula Kiadó. Budapest. 2012. ISBN 978-963-339-018-4
A könyv az OTKA 101224 pályázat támogatásával jelent meg.

Kivonat
A páros összehasonlítás mátrixokat három és fél évtizede ismerik és alkalmazzák a döntéshozók preferenciájának számszerűsítésére, jellemzően a többszempontú döntéshozatalban. A gyakorlati problémákban a döntéshozó által kitöltött mátrixban előfordulhatnak kisebb-nagyobb ellentmondások, ezek jelenlétét és súlyosságát különböző módon definiált inkonzisztencia indexek mérik. A dolgozatban az inkonzisztencia indexek egy általános osztályára vonatkozó kérdést vizsgálunk: adott inkonzisztencia index és elfogadási szint esetén mi a döntéshozó által megadott mátrixban azon elemek minimális száma, amelyek (és reciprokaik) megváltoztatásával a mátrix elfogadható inkonzisztenciájúvá tehető. Megmutatjuk, hogy a kérdés megválaszolása egy nemlineáris vegyes-diszkrét optimalizálási feladat megoldására vezet. Két ismert inkonzisztencia indexet részletesebben is megvizsgálunk és egy számpéldán keresztül bemutatjuk a javasolt módszer működését. Az eljárás minden olyan döntéstámogató rendszerben alkalmazható, amely páros összehasonlításokra épül és lehetővé teszi a döntéshozóval való interakciót.

Bozóki Sándor
Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, Operációkutatás és Döntési Rendszerek Kutatócsoport és Budapesti Corvinus Egyetem, Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék, email: bozoki@sztaki.hu

Fülöp János
Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, Operációkutatás és Döntési Rendszerek Kutatócsoport, email: fulop@sztaki.hu

Poesz Attila
Budapesti Corvinus Egyetem, Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék,
email: attila.poesz@uni-corvinus.hu

1. Bevezetés

A többszempontú döntési feladat célja véges sok alternatíva véges sok szempont szerinti rangsorolása, esetenként elegendő az összességében legjobb alternatíva kiválasztása. A megoldás során szükség van a szempontok fontosságának számszerűsítésére (*súlyozására*) és az alternatívák pontozására (*értékelésére*) minden egyes szempont szerint. Csoportos döntési szituációkban felmerülhet még a döntéshozókhoz rendelt *szavazóerők megadása* is. A páros összehasonlítás mátrixok (Saaty, 1980) alkalmazhatók mind a három lépésben, miután a döntéshozókat az alábbi típusú kérdésekkel szembesítjük: „Két szempontot összehasonlítva melyik a fontosabb és az hányszor fontosabb? Egy adott szempont szerint összehasonlítva két alternatívát melyik a jobb és az hányszor jobb? Egy adott szempont szerinti pontozásban hányszor akkora súllyal vegyük figyelembe az egyik döntéshozó véleményét, mint a másikét?"

A páros összehasonlítás mátrix fogalma jelen kötet egy másik cikkében (Temesi et al., 2012) is központi helyet foglal el.

Az $n \times n$ méretű valós A mátrix *páros összehasonlítás mátrix*, ha pozitív és reciprok, azaz

$$a_{ij} > 0, \tag{1}$$

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}} \tag{2}$$

minden $i, j = 1, \ldots, n$ esetén. Az A páros összehasonlítás mátrix *konzisztens*, ha teljesíti az

$$a_{ij} a_{jk} = a_{ik} \tag{3}$$

tranzitivitási tulajdonságot minden $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ esetén. A nem konzisztens mátrixokat inkonzisztensnek nevezzük.

Egy A $n \times n$-es pozitív mátrix esetén legyen $\bar{A} = \log A$ az az $n \times n$-es mátrix, amelynek elemeire

$$\bar{a}_{ij} = \log a_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

teljesül. Ekkor az A páros összehasonlítás mátrix pontosan akkor konzisztens, ha

$$\bar{a}_{ij} + \bar{a}_{jk} + \bar{a}_{ki} = 0, \qquad i, j, k = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

A (4) homogén lineáris egyenletrendszernek eleget tevő $\bar{A}$ mátrixok nyilván egy lineáris alteret alkotnak $\mathbb{R}^{n \times n}$-ben.

Jelölje $\mathscr{P}_n$ az $n \times n$-es páros összehasonlítás mátrixok halmazát és $\mathscr{C}_n \subset \mathscr{P}_n$ a konzisztens mátrixok halmazát. Mivel a logaritmizált térben a (2) reciprocitási feltételnek az

$$\bar{a}_{ij} = -\bar{a}_{ji}$$

feltétel felel meg, $\log \mathscr{P}_n = \{\log A \mid A \in \mathscr{P}_n\}$ az $n \times n$ méretű ferdén szimmetrikus mátrixok halmazával azonos, amely $\mathbb{R}^{n\times n}$ egy $n(n-1)/2$ dimenziós lineáris alterét alkotja. A $\log \mathscr{C}_n = \{\log A \mid A \in \mathscr{C}_n\}$ halmaz a (4)-nek eleget tevő mátrixok halmaza, amelyről megmutatható, hogy $\mathbb{R}^{n\times n}$ egy $n-1$ dimenziós lineáris altere (Chu, 1998). Nyilván $\log \mathscr{C}_n \subset \log \mathscr{P}_n$.

A valós élet döntési feladatainál a páros összehasonlítás mátrixok ritkán konzisztensek. A döntési folyamat eredménye szempontjából sem mindegy azonban, hogy a döntéshozók által megadott összehasonlítások milyen mértékben állnak összhangban, vagy éppen ellentmondásban egymással. Szükség van tehát olyan mutatóra, amellyel a páros összehasonlítás mátrix esetleges következetlenségeit, inkonzisztenciáját mérni lehet.

Egy $\phi_n : \mathscr{P}_n \to \mathbb{R}$ függvényt inkonzisztencia indexnek nevezünk, ha $\phi_n(A) = 0$ minden konzisztens és $\phi_n(A) > 0$ minden inkonzisztens páros összehasonlítás mátrix esetén. A gyakorlatban használt inkonzisztencia indexek folytonosak, így a $\phi_n(A) > 0$ érték többé-kevésbé azt is jelzi, hogy az inkonzisztens mátrix mennyire tér el egy konzisztenstől.

Mivel gyakorlati páros összehasonlítás mátrixok esetén a konzisztencia nehezen biztosítható, bizonyos szintű inkonzisztenciát általában még elfogadnak a döntéshozók. Ez a gyakorlatban úgy működik, hogy adott ϕ_n inkonzisztencia indexhez választanak egy $\alpha_n \geq 0$ elfogadási szintet, és egy $A \in \mathscr{P}_n$ mátrixot csak akkor tartanak meg további felhasználás céljára, ha $\phi_n(A) \leq \alpha_n$ teljesül, különben elvetik azt, vagy újból elvégeztetik a páros összehasonlításokat. A mátrix kitöltéséhez szükséges összes páros összehasonlítás újbóli elvégzése gyakran időigényes feladat. Ezért egy előírt elfogadási szint feletti inkonzisztenciájú mátrix teljes elvetése előtt érdemes megvizsgálni, hogy van-e esély kevesebb számú páros összehasonlítás újbóli elvégzésével elfogadható inkonzisztenciájúvá tenni a mátrixot.

A dolgozatban megmutatjuk, hogy adott $A \in \mathscr{P}_n$, ϕ_n inkonzisztencia index és α_n elfogadási szint esetén annak a kérdésnek a megválaszolása, hogy mi az A mátrix azon elemeinek a minimális száma, amelyek (és reciprokaik) megváltoztatásával elfogadható inkonzisztenciájúvá tehető a páros összehasonlítás mátrix, egy nemlineáris vegyes-diszkrét, pontosabban vegyes 0-1-es optimalizálási feladat megoldásával elérhető, amennyiben egy egyszerű korlátossági feltétellel élünk. Ha kiderül, hogy viszonylag kevés elem megváltoztatásával elfogadható inkonzisztenciájúvá tehető a mátrix, akkor nem zárható ki, hogy a többé-kevésbé konzisztens módon értékelő ennél a néhány elemnél kevésbé volt figyelmes, esetleg adatrögzítési hiba történt. Érdemes tehát újra kiértékelni ezeket az elemeket. Ha az értékelő ragaszkodik a korábbi értékekhez vagy az új értékekkel sem érjük el az elfogadható inkonzisztencia szintjét, akkor ez a megközelítés nem járt sikerrel, az összes páros összehasonlítást újból el kell végezni. Ha azonban a kritikus elemek felülvizsgálata után kapott mátrix már elfogadható inkonzisztenciájú, akkor ezzel folytathatjuk a döntési eljárást.

A fenti vizsgálatokkal kapcsolatban megoldandó nemlineáris vegyes 0-1-es optimalizálási feladatoknál előnyös, ha a bináris változók relaxálásával kapott nemlineáris programozási feladatok konvex optimalizálási feladatok. Ebben az esetben ugyanis számos hatékony módszer és szoftver áll rendelkezésünkre, míg nemkonvexitás esetén módszertani és implementációs nehézségek is adódhatnak. Mivel $\log \mathscr{C}_n$ lineáris altér, ezért $\mathscr{C}_n$ egy nem-konvex sokaság $\mathbb{R}^{n\times n}$-ben. Ebből rögtön sejthetjük, hogy a fenti konvexitási kérdéseket érdemesebb a logaritmizált térben vizsgálni. Jelen dolgozat fő eredményeként megmutatjuk, hogy az irodalomból ismert két alapvető inkonzisztencia index, a (Bozóki és Rapcsák, 2008) dolgozatban kiemelten vizsgált Saaty-féle *CR* (Saaty, 1980) és Koczkodaj-féle *CM* (Duszak és Koczkodaj, 1994; Koczkodaj, 1993) inkonzisztencia mérőszámok esetén a már említett nemlineáris vegyes 0-1-es optimalizálási feladatok a logaritmizált térben is megfogalmazhatóak, és ott már teljesül rájuk a megfelelő konvexitási tulajdonság. Megmutatjuk, hogy a logaritmizált térben *CR* konvex függvény, *CM* pedig kvázikonvex, de egy további szigorúan monoton egyváltozós függvény segítségével konvex függvénnyé alakítható.

A 2. fejezetben a megoldandó optimalizálási feladatokat mutatjuk be általános alakban. A Saaty *CR* inkonzisztencia mérőszámával kapcsolatos kérdéseket a 3. fejezetben tárgyaljuk. A 4. fejezetben Koczkodaj *CM* inkonzisztencia indexe képezi hasonló vizsgálat tárgyát.Végül Egy az 5. fejezetben numerikus példát mutatunk be.

2. A megoldandó optimalizálási feladatok általános alakban

Adott ϕ_n inkonzisztencia index és α_n elfogadási szint esetén jelölje

$$\mathscr{A}_n(\phi_n,\alpha_n) = \{A \in \mathscr{P}_n \mid \phi_n(A) \leq \alpha_n\} \tag{5}$$

azon $n \times n$-es páros összehasonlítás mátrixok halmazát, amelyek ϕ_n szerinti inkonzisztencia értéke nem haladja meg az α_n elfogadási szintet. Legyen $A,\hat{A} \in \mathscr{P}_n$ és jelölje

$$d(A,\hat{A}) = |\{(i,j) : 1 \leq i < j \leq n, a_{ij} \neq \hat{a}_{ij}\}| \tag{6}$$

azon elemek számát a felső háromszög pozíciókban, ahol a két mátrix eltér egymástól. Nyilván ugyanennyi az eltérő elemek száma az alsó háromszög pozíciókban is.

Tekintsünk egy $A \in \mathscr{P}_n$ páros összehasonlítás mátrixot, amelyre $\phi_n(A) > \alpha_n$ teljesül, azaz nem elfogadható. Arra vagyunk kíváncsiak, hogy legalább hány elemet kell megváltoztatni a felső háromszög (és nyilván az alsó háromszög) pozíciókban úgy, hogy a módosított páros összehasonlítás mátrix már elfogadható legyen. Matematikai alakban ez a

$$\begin{aligned} &\min\ d(A,\hat{A}) \\ &\text{f.h.}\ \ \hat{A} \in \mathscr{A}_n(\phi_n,\alpha_n) \end{aligned} \tag{7}$$

optimalizálási feladat megoldását jelenti, ahol $\hat{A}$ a változó.

Feltehetjük azt a kérdést is, hogy mi az a minimális inkonzisztencia szint, amit az $A \in \mathscr{P}_n$ mátrix legfeljebb K számú elemének (és azok reciprokainak) megváltoztatásával elérhetünk.

Ez a feladat matematikai alakban

$$\begin{aligned} &\min\ \alpha \\ &\text{f.h.}\ \ d(A,\hat{A}) \le K, \\ &\qquad \hat{A} \in \mathscr{A}_n(\phi_n,\alpha), \end{aligned} \tag{8}$$

ahol α és $\hat{A}$ a változók.

A (7) és (8) feladatokat a logaritmizált térben is megfogalmazhatjuk. Nyilván

$$\log \mathscr{A}_n(\phi_n,\alpha_n) = \{X \in \log \mathscr{P}_n \mid \phi_n(\exp X) \le \alpha_n\}, \tag{9}$$

ezért a (7) feladat a

$$\begin{aligned} &\min\ d(\log A, X) \\ &\text{f.h.}\ \ X \in \log \mathscr{P}_n, \\ &\qquad \phi_n(\exp X) \le \alpha_n \end{aligned} \tag{10}$$

feladattal ekvivalens, ahol X a változó, a d eltérésfüggvény pedig (6) szerint van értelmezve ferdén szimmetrikus mátrixok esetén is. A (10) első feltétele azt jelenti, hogy X a ferdén szimmetrikus mátrixok alteréből van, a második pedig egy nemlineáris egyenlőtlenségi feltétel. A dolgozatban megmutatjuk, hogy ez egy konvex feltétel a Saaty-féle *CR* (Saaty, 1980) és a Koczkodaj-féle *CM* (Duszak és Koczkodaj, 1994; Koczkodaj, 1993) inkonzisztencia indexek esetén.

A (8) feladat ekvivalens alakját is hasonló módon kaphatjuk:

$$\begin{aligned} &\min\ \alpha \\ &\text{f.h.}\ \ d(\log A, X) \le K, \\ &\qquad X \in \log \mathscr{P}_n, \\ &\qquad \phi_n(\exp X) \le \alpha, \end{aligned} \tag{11}$$

ahol α és X a változók.

Az optimalizálási feladatokban nehezen kezelhető d eltérésfüggvényt kiválthatjuk az egészértékű modellezésben jól ismert „Big-M” technika alkalmazásával. Ehhez feltételezni kell, hogy ismert egy $M \ge 1$ felső korlát az $A \in \mathscr{P}_n$ és a (7), illetve (8) feladatok optimális megoldásaként szóba jöhető $\hat{A} \in \mathscr{P}_n$ mátrixok elemeire vonatkozóan, azaz

$$1/M \le a_{ij} \le M,\ 1/M \le \hat{a}_{ij} \le M, \qquad i,j = 1,\dots,n. \tag{12}$$

Egy ilyen M felső korlátot kaphatunk akkor, ha a konkrét ϕ_n ismeretében meg tudunk határozni egy korlátos tartományt, amely biztosan tartalmazza a (7), illetve (8) feladat legalább egy optimális megoldását. De ha elméleti M korlátot nem is tudunk könnyen meghatározni, konkrét páros összehasonlítási feladatoknál általában természetesen adódik egy ésszerű M korlát a lehetséges páros összehasonlítási mátrixok elemeire vonatkozóan.

A (12) feltételt az

$$A, \hat{A} \in [1/M, M]^{n\times n} \tag{13}$$

mátrixalakban is felírhatjuk, és a (13) $\hat{A}$-ra vonatkozó korlátozását a (7), illetve a (8) feladathoz csatolva a

$$\begin{aligned} &\min\ d(A,\hat{A}) \\ &\text{f.h. } \hat{A} \in \mathscr{A}_n(\phi_n, \alpha_n) \cap [1/M, M]^{n\times n}, \end{aligned} \tag{14}$$

illetve a

$$\begin{aligned} &\min\ \alpha \\ &\text{f.h. } d(A,\hat{A}) \le K, \\ &\qquad \hat{A} \in \mathscr{A}_n(\phi_n, \alpha) \cap [1/M, M]^{n\times n} \end{aligned} \tag{15}$$

feladatot kapjuk.

Bevezetve az $\bar{M} = \log M$ jelölést, a logaritmizált térben a (14), illetve a (15) feladat ekvivalens alakja a következőképpen írható fel:

$$\begin{aligned} &\min\ d(\log A, X) \\ &\text{f.h. } X \in \log \mathscr{P}_n \cap [-\bar{M}, \bar{M}]^{n\times n}, \\ &\qquad \phi_n(\exp X) \le \alpha_n, \end{aligned} \tag{16}$$

illetve

$$\begin{aligned} &\min\ \alpha \\ &\text{f.h. } d(\log A, X) \le K, \\ &\qquad X \in \log \mathscr{P}_n \cap [-\bar{M}, \bar{M}]^{n\times n}, \\ &\qquad \phi_n(\exp X) \le \alpha. \end{aligned} \tag{17}$$

A (16) és (17) feladatra már közvetlenül alkalmazhatjuk a „Big-M” technikát. Legyen $\bar{A} = \log A$, és vezessük be az $y_{ij} \in \{0,1\},\ 1 \le i < j \le n$, bináris változókat. Felhasználva, hogy $\bar{A} \in [-\bar{M}, \bar{M}]^{n\times n}$, a (16) feladat az alábbi ekvivalens, vegyes 0-1 programozási alakban is megfogalmazható:

$$\begin{array}{lll} \min & \sum\limits_{i=1}^{n-1} \sum\limits_{j=i+1}^{n} y_{ij} & \\ \text{f.h.} & \phi_n(\exp X) \le \alpha_n, & \\ & x_{ij} = -x_{ji}, & 1 \le i \le j \le n, \\ & -\bar{M} \le x_{ij} \le \bar{M}, & 1 \le i < j \le n, \\ & -2\bar{M} y_{ij} \le x_{ij} - \bar{a}_{ij} \le 2\bar{M} y_{ij}, & 1 \le i < j \le n, \\ & y_{ij} \in \{0,1\}, & 1 \le i < j \le n. \end{array} \tag{18}$$

A (18) optimumértéke megadja, hogy legalább hány elemet kell megváltoztatni az A $n \times n$-es páros összehasonlítás mátrix felső háromszög (és nyilván az alsó háromszög) pozícióiban úgy, hogy a módosított páros összehasonlítás mátrix ϕ_n inkonzisztenciája ne haladja meg az α_n elfogadási szintet. Az optimális megoldás $y_{ij} = 1$ értékei kijelölik a módosítandó elemeket, az $\exp x_{ij}$ értékek pedig egy módosítási lehetőséget mutatnak be, de azt a megfelelő páros összehasonlításokat esetleg újból elvégzőknek egyáltalán nem kell figyelembe venniük.

A (18) feladatnak a bináris változók szerint több optimális megoldása lehet, és ezeket külön-külön is érdemes lehet megvizsgálni. Az optimalizáló szoftverek azonban általában csak egy optimális megoldást szolgáltatnak, így a bináris változók szerinti összes optimális megoldás előállításáról saját magunknak kell gondoskodni.

Legyen L^* a (18) feladat optimumértéke, y^*_{ij}, $1 \le i < j \le n$, egy optimális megoldása és $I^*_0 = \{(i,j) \mid y^*_{ij} = 0, 1 \le i < j \le n\}$. A

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} y_{ij} = L^* \tag{19}$$

feltétel (18)-hoz való csatolásával azt biztosítjuk, hogy a továbbiakban csak a (18) optimális megoldásai lehetnek a (18)-(19) megengedett megoldásai. A

$$\sum_{(i,j)\in I^*_0} y_{ij} \ge 1 \tag{20}$$

feltétel csatolásával pedig a már megtalált optimális megoldást zárjuk ki a további keresésből. Amennyiben az derül ki, hogy a (18)-(19)-(20) feladatnak nincs megengedett megoldása, az azt jelenti, hogy megtaláltuk a (18) összes optimális megoldását. Különben pedig az új optimális megoldáshoz is készítünk egy a (20)-hoz hasonló kizáró feltételt, csatoljuk azt is a (20)-hoz, és újból megoldjuk a (18)-(19)-(20) feladatot. Nyilván véges számú iteráció után előáll a (18) feladat bináris változók szerinti összes optimális megoldása.

A (17) feladat a (18)-hoz hasonlóan írható át ekvivalens alakra:

$$\begin{array}{lll}
\min & \alpha & \\
\text{f.h.} & \phi_n(\exp X) \le \alpha, & \\
& \sum\limits_{i=1}^{n-1} \sum\limits_{j=i+1}^{n} y_{ij} \le K, & \\
& x_{ij} = -x_{ji}, & 1 \le i \le j \le n, \\
& -\bar{M} \le x_{ij} \le \bar{M}, & 1 \le i < j \le n, \\
& -2\bar{M}y_{ij} \le x_{ij} - \bar{a}_{ij} \le 2\bar{M}y_{ij}, & 1 \le i < j \le n, \\
& y_{ij} \in \{0,1\}, & 1 \le i < j \le n.
\end{array} \tag{21}$$

Azonnal látható, hogy ha $\phi_n(\exp X)$ az X mátrix elemeinek konvex függvénye, a (18) és a (21) feladatok relaxáltjai konvex optimalizálási feladatok, így a (18), illetve a (21) is egy vegyes 0-1-es konvex programozási feladat.

3. A Saaty-féle *CR* index

A Saaty (1980) által javasolt inkonzisztencia mérőszám azon alapszik, hogy a páros összehasonlítás maximális sajátértéke ($\lambda_{\max}$) legalább akkora, mint a mátrix dimenziója (n), továbbá pontosan akkor teljesül az egyenlőség, ha a mátrix konzisztens. Azon intuíciót, hogy minél messzebb van a maximális sajátérték a mátrix méretétől, annál inkonzisztensebbnek tekinthetjük a mátrixot, az alábbi módon lehet formalizálni:

$$CI_n = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1},$$

tehát CI_n egy pozitív lineáris transzformáltja $\lambda_{\max}$-nak, és az említett $\lambda_{\max} \geq n$ egyenlőtlenség miatt $CI_n \geq 0$. A CI_n értékét azonban önmagában nem tudjuk kezelni, hiszen nincs mihez viszonyítani, nem lehet megmondani, hogy mely érték számít nagynak és melyik kicsinek. Az inkonzisztencia mérésének eredeti célja szerint ez annak felel meg, hogy mikor lehet elfogadhatatlannak vagy elfogadhatónak tekinteni a mátrixot. Saaty – azóta számos alkalommal kritizált – javaslata szerint generáljunk véletlenszerűen $n \times n$-es páros összehasonlítás mátrixokat, amelyeknek az elemeit az $1/9, 1/8, 1/7, \ldots, 1/2, 1, 2, \ldots, 8, 9$, arányskáláról választjuk egyenlő valószínűséggel és ezen véletlen mátrixok CI_n értékeinek átlagos értékét jelöljük RI_n-nel. Egy konkrét, döntéshozó által kitöltött páros összehasonlítás mátrix *CR* inkonzisztenciája a $CR_n = CI_n / RI_n$ aránnyal definiált és az elfogadhatóság feltételeként a 10%-os szabályként ismert $CR_n \leq 0.1$ egyenlőtlenség adható. A 10%-os szabállyal kapcsolatos kritikák egy részére válaszol a (Vargas, 1982) cikk, illetve a kisebb méretű mátrixokra vonatkozó módosítás (Saaty, 1994). Megjegyezzük, hogy az inkonzisztencia mérésére számos további javaslat adható (Brunelli és Fedrizzi, 2011), de az elfogadhatósági küszöbérték megadásával a legtöbb módszer még adós.

Mivel CR_n és CI_n között egyenes arányossági összefüggés van, mindkettő használható inkonzisztencia indexként. Mivel a klasszikus 10 %-os elfogadási szint a CR_n mutatóra vonatkozik, a CR_n-t használjuk a 2. fejezetben általánosan tárgyalt ϕ_n inkonzisztencia index speciális eseteként.

Egy $X \in \log \mathscr{P}_n$ esetén jelölje $\lambda_{\max}(\exp X)$ az $A = \exp X$ mátrix maximális sajátértékét. Ekkor

$$\phi_n(\exp X) = \frac{\lambda_{\max}(\exp X) - n}{RI_n(n-1)}. \tag{22}$$

A (22) összefüggésből látszik, hogy $\phi_n(\exp X)$ pontosan akkor konvex függvénye az X mátrix elemeinek, ha $\lambda_{\max}(\exp X)$ is az, ez utóbbi tulajdonság pedig bizonyítást nyert a (Bozóki et al., 2010) dolgozatban. Nevezetesen, $\lambda_{\max}(\exp X)$ nemcsak a ferdén szimmetrikus mátrixok alterén konvex, hanem az $n \times n$-es mátrixok halmaza felett is.

A fentiek alapján bizonyítottuk, hogy (22) esetén a (18), illetve a (21) egy vegyes 0-1-es konvex optimalizálási feladat. Numerikus szempontból nehézséget okoz azonban, hogy

$\phi_n(\exp X)$ nem adható meg explicit alakban, mivel a $\lambda_{\max}$ értékek maguk is iterációs módszerrel számítódnak (Saaty, 1980). Ez a tény megnehezíti a standard megoldó szoftverek alkalmazását. Megmutatjuk azonban, hogy a $\lambda_{\max}$ érték előáll egy konvex optimalizálási feladat optimumaként, ezért a beágyazott optimalizálási feladat összevonható a beágyazó feladattal.

A Frobenius-tétel egy speciális esetét fogjuk alkalmazni (Saaty, 1980; Sekitani és Yamaki, 1999):

1. Tétel. *Legyen A egy $n\times n$-es irreducibilis nemnegatív mátrix, $\lambda_{\max}(A)$ pedig az A legnagyobb sajátértéke. Ekkor*

$$\max_{\mathbf{w}>\mathbf{0}}\min_{i=1,\dots,n}\frac{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}w_j}{w_i}=\lambda_{\max}(A)=\min_{\mathbf{w}>\mathbf{0}}\max_{i=1,\dots,n}\frac{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}w_j}{w_i}. \tag{23}$$

Mivel a páros összehasonlítási mátrixok pozitívak, az 1. Tétel közvetlenül alkalmazható rájuk.

Az $\bar{a}_{ij}=\log a_{ij}, i,j=1,\dots,n$, mellé bevezetve a $z_i=\log w_i, i=1,\dots,n$, jelöléseket is, a (23) alatti jobb oldali egyenlőséget a

$$\lambda_{\max}(A)=\min_{\mathbf{z}}\max_{i=1,\dots,n}\sum_{j=1}^{n}\exp(\bar{a}_{ij}+z_j-z_i) \tag{24}$$

alakra írhatjuk át. A (24) jobb oldalán szereplő konvex exponenciális függvények összegei és azok maximuma szintén konvex, $\lambda_{\max}$ tehát egy konvex optimalizálási feladat optimumaként áll elõ. A (24) összefüggést abban a formában is megfogalmazhatjuk, hogy $\lambda_{\max}(A)$ optimumértéke a

$$\min\ \lambda \quad \text{f.h.} \quad \sum_{j=1}^{n}\exp(\bar{a}_{ij}+z_j-z_i)\le\lambda, \qquad i=1,\dots,n \tag{25}$$

konvex optimalizálási feladatnak, ahol λ és $z_i,\ i=1,\dots,n$, a változók.

Legyen α_n adott elfogadási szint a $\phi_n=CR_n$ inkonzisztencia index esetén. Ekkor a (18) feladatban szereplő

$$\phi_n(\exp X)\le\alpha_n \tag{26}$$

feltétel a (22) alapján $\lambda_{\max}(\exp X)$ segítségével is kifejezhető:

$$\lambda_{\max}(\exp X)\le n+RI_n(n-1)\alpha_n. \tag{27}$$

Legyen $\alpha_n^*=n+RI_n(n-1)\alpha_n$. Ekkor (24) alapján, az $\bar{a}_{ij}$ helyébe most x_{ij}-t írva, (27) a

$$\sum_{j=1}^{n} \exp(x_{ij} + z_j - z_i) \leq \alpha_n^*, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{28}$$

feltételrendszerrel ekvivalens.

A (18) feladatba a (26) feltétel helyett a (28) összefüggést írva, a következő konvex vegyes 0-1-es optimalizálási feladatot kapjuk:

$$\begin{array}{lll}
\min & \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} y_{ij} & \\
\text{f.h.} & \sum_{j=1}^{n} \exp(x_{ij} + z_j - z_i) \leq \alpha_n^*, & i = 1, \ldots, n, \\
& x_{ij} = -x_{ji}, & 1 \leq i \leq j \leq n, \\
& -\bar{M} \leq x_{ij} \leq \bar{M}, & 1 \leq i < j \leq n, \\
& -2\bar{M} y_{ij} \leq x_{ij} - \bar{a}_{ij} \leq 2\bar{M} y_{ij}, & 1 \leq i < j \leq n, \\
& y_{ij} \in \{0, 1\}, & 1 \leq i < j \leq n.
\end{array} \tag{29}$$

2. Tétel. *A (29) optimumértéke megadja, hogy legalább hány elemet kell megváltoztatni az A $n \times n$-es páros összehasonlítás mátrix felső háromszög (és nyilván az alsó háromszög) pozícióiban úgy, hogy a módosított páros összehasonlítás mátrix CR_n inkonzisztenciája ne haladja meg az α_n elfogadási szintet, ahol $\alpha_n = (\alpha_n^* - n)/(RI_n(n-1))$.*

A (21) feladatot is specializálhatjuk a $\phi_n = CR_n$ inkonzisztencia index esetére. A (22) összefüggés alapján ϕ_n minimalizálása ekvivalens $\lambda_{\max}$ minimalizálásával. A $\lambda_{\max}$-ra vonatkozó (25) feladatot is figyelembe véve tekintsük az alábbi konvex vegyes 0-1-es optimalizálási feladatot:

$$\begin{array}{lll}
\min & \lambda & \\
\text{f.h.} & \sum_{j=1}^{n} \exp(x_{ij} + z_j - z_i) \leq \lambda, & i = 1, \ldots, n, \\
& \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} y_{ij} \leq K, & \\
& x_{ij} = -x_{ji}, & 1 \leq i \leq j \leq n, \\
& -\bar{M} \leq x_{ij} \leq \bar{M}, & 1 \leq i < j \leq n, \\
& -2\bar{M} y_{ij} \leq x_{ij} - \bar{a}_{ij} \leq 2\bar{M} y_{ij}, & 1 \leq i < j \leq n, \\
& y_{ij} \in \{0, 1\}, & 1 \leq i < j \leq n.
\end{array} \tag{30}$$

3. Tétel. *Jelölje λ^* a (30) optimumértékét, és legyen $\alpha^* = (\lambda^* - n)/(RI_n(n-1))$. Ekkor α^* a CR_n inkonzisztencia index minimálisan elérhető szintje olyan páros összehasonlítási mátrixok esetén, amelyeket úgy kapunk, hogy az A $n \times n$-es páros összehasonlítás mátrix felső háromszög (és nyilván az alsó háromszög) pozícióiban legfeljebb K elemet változtatunk meg.*

4. A Koczkodaj-féle *CM* index

A Koczkodaj által bevezetett (Koczkodaj, 1993; Duszak és Koczkodaj, 1994) inkonzisztencia index a 3×3-as részmátrixokra, triádokra épül. Az

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1/a & 1 & c \\ 1/b & 1/c & 1 \end{pmatrix}$$

3×3-as páros összehasonlítás mátrix esetén legyen

$$CM(a,b,c) = \min \left\{ \frac{1}{a} \left| a - \frac{b}{c} \right|, \frac{1}{b} |b - ac|, \frac{1}{c} \left| c - \frac{b}{a} \right| \right\}.$$

Az index $n > 3$ esetén kiterjeszthető tetszőleges A $n \times n$-es páros összehasonlítás mátrixra:

$$CM(A) = \max \left\{ CM(a_{ij}, a_{ik}, a_{jk}) \middle| \, 1 \leq i < j < k \leq n \right\}. \tag{31}$$

A Saaty-féle CR_n indextől eltérően itt nem jelennek meg n-től függő paraméterek a konstrukcióban, ezért itt eltekintünk a CM_n alak használatától. Könnyen látható, hogy CM inkonzisztencia index, mivel tetszőleges $A \in \mathscr{P}_n$ esetén $CM(A) \geq 0$, és $CM(A) = 0$ pontosan akkor, ha A konzisztens.

Egy általános (a,b,c) triád esetén legyen

$$T(a,b,c) = \max \left\{ \frac{ac}{b}, \frac{b}{ac} \right\}. \tag{32}$$

Megmutatható (Bozóki és Rapcsák, 2008), hogy a CM index és T között függvényszerű kapcsolat áll fenn:

$$CM(a,b,c) = 1 - \frac{1}{T(a,b,c)}, \quad T(a,b,c) = \frac{1}{1 - CM(a,b,c)}. \tag{33}$$

Mivel $T(a,b,c) \geq 1$, ezért $0 \leq CM(a,b,c) < 1$, így $0 \leq CM(A) < 1$.

Jelölje $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ az (a,b,c) triád logaritmizált értékeit, és legyen

$$\bar{T}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \max \left\{ \bar{a} + \bar{c} - \bar{b}, \; -(\bar{a} + \bar{c} - \bar{b}) \right\}.$$

Ekkor

$$T(a,b,c) = \exp(\bar{T}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})) \tag{34}$$

$$CM(a,b,c) = 1 - \frac{1}{\exp(\bar{T}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}))}. \tag{35}$$

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy CM már triádok esetén sem konvex függvénye a logaritmizált mátrixértékeknek, ezért a $\phi_n = CM$ konzisztencia index választás esetén a (18) és a (21) feladatban megjelenő $\phi_n(\exp X)$ az X mátrix elemeinek nem konvex függvénye. Megmutatjuk azonban, hogy a $(-\infty, 1)$ intervallumon szigorúan monoton növekvő egyváltozós

$$f(t) = \frac{1}{1-t} \tag{36}$$

függvény alkalmazásával az $f(\phi_n(\exp X)) = f(CM(\exp X))$ az X mátrix elemeinek már konvex függvénye. Ekkor a (18) feladat

$$\phi_n(\exp X) \leq \alpha_n$$

feltételét kicserélhetjük az

$$f(\phi_n(\exp X)) \leq f(\alpha_n)$$

konvex feltételre. A (21) feladatban szereplő $\phi_n(\exp X)$ mátrixfüggvény helyett írhatunk közvetlenül $f(\phi_n(\exp X))$-et, és a módosított feladat α^* optimumértékével számolt $f^{-1}(\alpha^*)$ érték lesz az eredeti (21) feladat optimumértéke.

Terjesszük ki a (32) által definiált T mutatót tetszőleges A $n \times n$-es páros összehasonlítás mátrixra:

$$T(A) = \max \left\{ T(a_{ij}, a_{ik}, a_{jk}) \middle| \, 1 \leq i < j < k \leq n \right\}. \tag{37}$$

Mivel (33) alapján triádok esetén szigorúan monoton növekvő függvénykapcsolat van CM és T között, ezért

$$CM(A) = 1 - \frac{1}{T(A)} = f^{-1}(T(A)), \;\; T(A) = \frac{1}{1 - CM(A)} = f(CM(A)), \tag{38}$$

ahol f a (36)-ben definiált függvény.

A T mutatót a logaritmizált térben kifejezve azt kapjuk, hogy

$$T(\exp X) = \max \left\{ \max \left\{ \exp(x_{ij} + x_{jk} + x_{ki}), \exp(-x_{ij} - x_{jk} - x_{ki}) \right\} \mid 1 \leq i < j < k \leq n \right\}. \tag{39}$$

Mivel a (39) jobb oldalán konvex függvények maximumát képezzük, $T(\exp X)$ az X mátrix elemeinek konvex függvénye. Tehát a $\phi_n = CM$ inkonzisztencia index választás esetén $f(\phi_n(\exp X))$ már konvex függvény, és a fent elmondottak szerint módosított (18) és (21) feladatok már konvex vegyes 0-1-es optimalizálási feladatok.

Bár $CM(\exp X)$ nem konvex, de kvázikonvex. Ehhez azt kell megmutatnunk, hogy $CM(\exp X)$ alsó szinthalmazai konvexek. Legyen $\beta \in [0, 1)$ tetszőlegesen választott lehetséges értéke $CM(\exp X)$-nek. Mivel f szigorúan monoton növekvő, ezért

$$\{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid CM(\exp X) \leq \beta\} = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid f(CM(\exp X)) \leq f(\beta)\}.$$

Viszont $T(\exp X) = f(CM(\exp X))$ konvexitása miatt a fenti szinthalmazok konvexek, ez pedig $CM(\exp X)$ kvázikonvexitását jelenti.

4. Tétel. *$CM(\exp X)$ kvázikonvex az $n \times n$-es mátrixok halmazán, $T(\exp X) = f(CM(\exp X))$ pedig konvex, ahol f a (36) szerint van értelmezve.*

A következőkben megmutatjuk, hogy a (18) és (21) feladatok még egyszerűbb módon is megoldhatók, nevezetesen megfelelő lineáris vegyes 0-1-es optimalizálási feladatok segítségével. Kihasználva az exponenciális függvény szigorúan monoton növekvő voltát, (39) az alábbi formában is felírható:

$$T(\exp X) = \exp\left(\max\left\{\max\{x_{ij}+x_{jk}+x_{ki}, -x_{ij}-x_{jk}-x_{ik}\} \mid 1 \le i < j < k \le n\right\}\right). \quad (40)$$

A (40) azt is jelenti, hogy $CM(A)$ meghatározható az $\bar{A} = \log A$ mátrix elemeivel képzett lineáris kifejezések maximumának meghatározásával, valamint az exponenciális és az f függvény egyszeri alkalmazásával.

5. Tétel (Bozóki et al., 2011). *Egy $n \times n$-es A páros összehasonlítás mátrix Koczkodaj-féle CM inkonzisztenciája a következő egyváltozós lineáris programozási feladat optimális megoldásából számítható:*

$$\begin{array}{ll} \min & z \\ \text{f.h.} & \bar{a}_{ij}+\bar{a}_{jk}+\bar{a}_{ki} \le z, \qquad 1 \le i < j < k \le n, \\ & -(\bar{a}_{ij}+\bar{a}_{jk}+\bar{a}_{ki}) \le z, \quad 1 \le i < j < k \le n. \end{array} \quad (41)$$

Legyen z_{opt} a (41) egy optimális megoldása. Ekkor $CM(A) = 1 - 1/\exp(z_{opt})$.

A következőkben jelölje $\alpha_n = CM^*$ a $\phi_n = CM$ inkonzisztencia indexhez tartozó elfogadási szintet és legyen

$$z^* = \log\left(\frac{1}{1-CM^*}\right). \quad (42)$$

Tekintsük a következő lineáris kevert 0-1 programozási feladatot:

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} y_{ij} & \\ \text{f.h.} & x_{ij}+x_{jk}+x_{ki} \le z^*, & 1 \le i < j < k \le n, \\ & -(x_{ij}+x_{jk}+x_{ki}) \le z^*, & 1 \le i < j < k \le n, \\ & x_{ij} = -x_{ji}, & 1 \le i \le j \le n, \\ & -\bar{M} \le x_{ij} \le \bar{M}, & 1 \le i < j \le n, \\ & -2\bar{M}y_{ij} \le x_{ij}-\bar{a}_{ij} \le 2\bar{M}y_{ij}, & 1 \le i < j \le n, \\ & y_{ij} \in \{0,1\}, & 1 \le i < j \le n. \end{array} \quad (43)$$

Az eddig tárgyaltak alapján közvetlenül adódnak a következő állítások.

6. Tétel. *A (43) feladat optimumértéke megadja, hogy legalább hány elemet kell megváltoztatni az A $n \times n$-es páros összehasonlítás mátrix felső háromszög (és nyilván az alsó háromszög) pozícióiban úgy, hogy a módosított páros összehasonlítás mátrix CM inkonzisztenciája ne haladja meg a CM^* elfogadási szintet.*

A (43) feladat némi átalakításával az alábbi lineáris kevert 0-1 programozási feladatot írhatjuk fel:

$$
\begin{array}{lll}
\min & z & \\
\text{f.h.} & x_{ij}+x_{jk}+x_{ki} \leq z, & 1 \leq i < j < k \leq n, \\
& -(x_{ij}+x_{jk}+x_{ki}) \leq z, & 1 \leq i < j < k \leq n, \\
& \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} y_{ij} \leq K, & \\
& x_{ij} = -x_{ji}, & 1 \leq i \leq j \leq n, \\
& -\bar{M} \leq x_{ij} \leq \bar{M}, & 1 \leq i < j \leq n, \\
& -2\bar{M}y_{ij} \leq x_{ij} - \bar{a}_{ij} \leq 2\bar{M}y_{ij}, & 1 \leq i < j \leq n, \\
& y_{ij} \in \{0,1\}, & 1 \leq i < j \leq n.
\end{array}
\tag{44}
$$

7. Tétel. *Jelölje z_{opt} a (44) optimumértékét. Ekkor $1-1/\exp(z_{opt})$ a CM inkonzisztencia index minimálisan elérhető szintje olyan páros összehasonlítás mátrixok esetén, amelyeket úgy kapunk, hogy az A $n \times n$-es páros összehasonlítás mátrix felső háromszög (és nyilván az alsó háromszög) pozícióiban legfeljebb K elemet változtatunk meg.*

5. Egy numerikus példa

A javasolt módszert egy Saaty (1980) könyvéből származó klasszikus numerikus példán is bemutatjuk, mégpedig a Saaty-féle *CR* inkonzisztencia mérőszám esetére. Az 1. táblázat hat nagyváros Philadelphiától való távolságának páros összehasonlítási értékeit tartalmazza. Például az értékelő úgy ítélte meg, hogy London ötször nagyobb távolságra fekszik Philadelphiától, mint Chicago.

	Kairó	Tokió	Chicago	San Francisco	London	Montreal
Kairó	1	1/3	8	3	3	7
Tokió	3	1	9	3	3	9
Chicago	1/8	1/9	1	1/6	1/5	2
San Francisco	1/3	1/3	6	1	1/3	6
London	1/3	1/3	5	3	1	6
Montreal	1/7	1/9	1/2	1/6	1/6	1

1. táblázat. Philadelphiától mért távolságok páronkénti összehasonlítása

Jelölje A az 1. táblázat páros összehasonlítás mátrixát. Ekkor $\lambda_{\max}(A) = 6,4536$, és mivel $RI_6 = 1,24$, így $CR(A) = 0,0732$. Miután $CR(A)$ értéke jóval a Saaty-féle 10%-os küszöb alatt van, az A mátrixot elfogadható inkonzisztenciájúnak tekinthetjük.

Jelölje $A^{(1)}$ azt a mátrixot, amelyet úgy kapunk, hogy felcseréljük az A mátrix $a_{1,2}$ és $a_{2,1}$ elemeit. Ez egy gyakori tévesztés páros összehasonlítás mátrixok kitöltésénél. Az $A^{(1)}$ mátrixra azt kapjuk, hogy $CR(A^{(1)}) = 0,0811$. Tehát az adatrögzítési hiba következtében ugyan emelkedett $A^{(1)}$ inkonzisztencia szintje, de még a 10%-os elfogadási szint alatt van. Ebben az esetben tehát a javasolt módszertan nem tudja detektálni a hibát, az $A^{(1)}$ mátrixot elfogadja.

Nézzük meg most azt az esetet, amikor nem az $a_{1,2}$ és $a_{2,1}$, hanem az $a_{1,3}$ és $a_{3,1}$ elemek cserélődnek fel véletlenül az A mátrixban. Jelölje $A^{(2)}$ az így kapott mátrixot. Ekkor $CR(A^{(2)}) = 0,5800$, amely jóval a 10%-os elfogadási szint felett van, és durva inkonzisztenciára utal. A megfelelő (29) megoldásaként azt kapjuk, hogy az $A^{(2)}$ mátrix inkonzisztenciája egy elem (és a reciproka) megváltoztatásával a kritikus 10% alá hozható. Ez az elem éppen az elrontott $a_{1,3}$ pozícióban van, és megmutatható, hogy a (29) feladatnak ez az egyetlen optimális megoldása van a bináris változók szerint. Tehát a javasolt módszer felderítette az egy pozíciónál történő javítás egyetlen lehetséges helyét, ami éppen a véletlenül rossz helyre írt kiértékelés pozíciója.

Az előző példánál jelentős inkonzisztencia emelkedést okozott a mátrix elrontása, ezért nem meglepő, hogy a módszer az egyértelmű (vissza)javítás lehetőségét kínálta fel. Kisebb inkonzisztencia emelkedésnél azonban már nem ilyen egyértelmű a helyzet.

Tegyük fel, hogy az A mátrix $a_{1,3}$ eleme most 2-re változik az előző példa 1/8 értéke helyett. Ez az eredeti 8 értékhez képest kisebb eltérés, a módosított és $A^{(3)}$-mal jelölt mátrix mátrix inkonzisztenciája is kevésbé nőtt meg: $CR(A^{(3)}) = 0,1078$. Az $A^{(3)}$ inkonzisztenciája alig haladja meg a kritikus 10%-os szintet, ezért várható, hogy egy elem módosításával is 10% alá hozható az inkonzisztencia, de az is, hogy erre több pozíció is kínálkozik. Valóban, a megfelelő (29) feladat optimumértéke 1, és a (19) és (20) csatolása utáni újrafuttatásokkal kideríthető, hogy a (29) feladatnak a bináris változók szerint 6 optimális megoldása van. Nevezetesen, az $A^{(3)}$ mátrix inkonzisztenciája 10% alá nyomható az $a_{1,3}$ mellett az $a_{1,4}$, $a_{1,5}$, $a_{2,6}$, $a_{3,4}$ és $a_{4,5}$ elemek külön-külön történő módosításával is. Jobb esetben az értékelő rögtön észreveszi, hogy az $a_{1,3}$ pozícióban elírás történt. Ha nem, akkor esetleg mind a 6 pozíció értékelését újra kell gondolnia, de ezek száma még mindig kisebb a felső háromszögben levő 15 elemnél.

Köszönetnyilvánítás:
A szerzők köszönetet mondanak Csató Lászlónak a kézirat gondos átolvasásáért és az értékes javaslatokért.
A kutatás az OTKA K-77420 pályázat támogatásával készült.

Hivatkozások

Bozóki, S., Fülöp, J., Koczkodaj, W. (2011). An LP-based consistency-driven supervision for incomplete pairwise comparison matrices. *Mathematical and Computer Modelling*, 54:789–793.

Bozóki, S., Fülöp, J., Rónyai, L. (2010). On optimal completion of incomplete pairwise comparison matrices. *Mathematical and Computer Modelling*, 52(1):318–333.

Bozóki, S., Rapcsák, T. (2008). On Saaty's and Koczkodaj's inconsistencies of pairwise comparison matrices. *Journal of Global Optimization*, 42(2):157–175.

Brunelli, M., Fedrizzi, M. (2011). Characterizing properties for inconsistency indices in the AHP. In: *Proceedings of the 11th International Symposium on the AHP*, Sorrento, Naples, Italy.

Chu, M. (1998). On the optimal consistent approximation to pairwise comparison matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 272(1):155–168.

Duszak, Z., Koczkodaj, W. (1994). Generalization of a new definition of consistency for pairwise comparisons. *Information Processing Letters*, 52(5):273–276.

Koczkodaj, W. (1993). A new definition of consistency of pairwise comparisons. *Mathematical and Computer Modelling*, 18(7):79–84.

Saaty, T. (1980). *Analytic Hierarchy Process*. McGraw-Hill, New York.

Saaty, T. (1994). *Fundamentals of Decision Making*. RWS Publications, Pittsburgh.

Sekitani, K., Yamaki, N. (1999). A logical interpretation for the eigenvalue method in AHP. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 42(2):219–232.

Temesi J., Csató L., Bozóki S. (2012). Mai és régi idők tenisze – A nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok egy alkalmazása. In: Solymosi T., Temesi J. (szerk.) *Egyensúly és optimum, Tanulmányok Forgó Ferenc 70. születésnapjára*, Aula Kiadó, Budapest.

Vargas, L. (1982). Reciprocal matrices with random coefficients. *Mathematical Modelling*, 3(1):69–81.