Különböző konzisztencia indexek összehasonlítása

Poesz Attila[1], Fülöp János[2] and Bozóki Sándor[1,2]

1 - Budapesti Corvinus Egyetem
2 - MTA SZTAKI

2010. november 4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/5 & 3 & 7 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & 1/5 & 5 & 3 \\ 5 & 1/3 & 1 & 3 & 5 & 3 \\ 1/3 & 5 & 1/3 & 1 & 3 & 3 \\ 1/7 & 1/5 & 1/5 & 1/3 & 1 & 1/3 \\ 1/5 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad CR = 34,71\% \quad \Rightarrow \text{Nagyon magas!}$$

Tulajdonságok

Önmagával azonos	$a_{ii} = 1,$	(1)
Reciprocitás	$a_{ij} = 1/a_{ji},$	(2)
Konzisztencia	$a_{ik} = a_{ij}a_{jk}, \forall_{i,j,k}$	(3)

Inkonzisztens az a mátrix, amelyik nem konzisztens.

- inkonzisztencia magas $\Rightarrow$ nincs értelme számolni

Új megközelítés

Mátrix triádjainak

- összefüggő rendszere
- javítása a teljes rendszer vizsgálatával

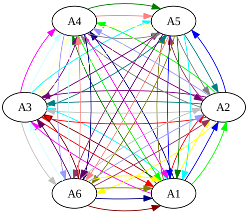
Jelölések: $A \in R^{n\times n}$

$$\bar{A} = \log A \rightarrow \bar{a}_{ij} = \log a_{ij}, \quad i,j = 1,\dots,n.$$

Konzisztencia: $\bar{a}_{ij} + \bar{a}_{jk} + \bar{a}_{ki} = 0, \quad \forall\, i,j,k = 1,\dots,n.$

Kutatási irányok:

1. Gráfelmélet
2. Egészértékű programozás (MIP, MINLP)



K adott

Az A mátrix maximum K elemének megváltoztatásával $\Rightarrow$ $min\ CM(A^*)$?

z változó $\Rightarrow CM(A^*) = 1 - \frac{1}{exp(z_{opt})}$

$\bar{M} = log(M)$
$\bar{a}_{ij} = log(a_{ij})$

$$
\begin{array}{llcll}
\min & z & & & \\
\text{s.t.} & x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} & \leq & z, & 1 \leq i < j < k \leq n, \\
 & -(x_{ij} + x_{jk} + x_{ki}) & \leq & z, & 1 \leq i < j < k \leq n, \\
 & x_{ij} & = & -x_{ji}, & 1 \leq i < j \leq n, \\
 & -\bar{M} \leq x_{ij} & \leq & \bar{M}, & 1 \leq i < j \leq n, \\
 & -2\bar{M}y_{ij} \leq x_{ij} - \bar{a}_{ij} & \leq & 2\bar{M}y_{ij}, & 1 \leq i < j \leq n, \\
 & y_{ij} & \in & \{0,1\}, & 1 \leq i < j \leq n, \\
\hline
 & \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} y_{ij} & \leq & K &
\end{array}
$$

$R^{6\times 6}$ mátrixok, III. MIP

Sorszám	CM	Min CM K=3	Eltérés	CR
2	0,78	0,63	0,15	9,38%
3	0,61	0,61	0	3,22%
4	0,75	0,63	0,13	6,9%
5	0,36	0	0,36	0,35%
6	0,63	0,56	0,07	4,23%
7	0,7	0,62	0,08	6,42%
8	0,64	0,53	0,11	3,64%
9	0,61	0,42	0,19	2,81%
10	0,44	0,44	0	1,24%
11	0,82	0,5	0,32	7,67%
12	0,47	0,4	0,07	1,88%
13	0,81	0,72	0,09	14,7%
14	0,98	0,67	0,31	34,71%
15	0,83	0,38	0,46	5,04%
16	0,75	0,63	0,13	7,69%
17	0,78	0,56	0,22	6,32%
18	0,83	0,67	0,17	12,01%
19	0,8	0,38	0,43	6,53%
20	0,6	0,5	0,1	3,98%
21	0,43	0	0,43	0,54%

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/5 & 3 & 7 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & 1/5 & 5 & 3 \\ 5 & 1/3 & 1 & 3 & 5 & 3 \\ 1/3 & 5 & 1/3 & 1 & 3 & 3 \\ 1/7 & 1/5 & 1/5 & 1/3 & 1 & 1/3 \\ 1/5 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad CR = 34,71\%$$

$$A_1^* = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/5 & 3 & 7 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & 1,51 & 5 & 3 \\ 5 & 1/3 & 1 & 3 & 5 & 3 \\ 1/3 & 0,65 & 1/3 & 1 & 3 & 3 \\ 1/7 & 1/5 & 1/5 & 1/3 & 1 & 1/3 \\ 1/5 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad CR = 15,03\%$$

$$A_2^* = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1,15 & 3 & 7 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & 2,95 & 5 & 3 \\ 0,87 & 1/3 & 1 & 3 & 5 & 3 \\ 1/3 & 0,34 & 1/3 & 1 & 3 & 3 \\ 1/7 & 1/5 & 1/5 & 1/3 & 1 & 1/3 \\ 1/5 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad CR = 7,29\%$$

$$A_3^* = \begin{pmatrix} 1 & 0,97 & 1,56 & 3 & 7 & 5 \\ 1,03 & 1 & 3 & 3 & 5 & 3 \\ 0,64 & 1/3 & 1 & 3 & 5 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1 & 3 & 3 \\ 1/7 & 1/5 & 1/5 & 1/3 & 1 & 1/3 \\ 1/5 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad CR = 4,94\%$$

Saaty-féle inkonzisztencia – *CR* –

A következetlenségi index a páros összehasonlítási mátrix maximális sajátértékéből számolható ki. (λ_{max}).

$$CR = \left(\frac{\lambda_{max} - n}{n-1} \right) \frac{1}{RI_n}, \ ahol$$

$$RI_n = \frac{\overline{\lambda_{max}} - n}{n-1}$$

Saaty szabály

Egy mátrix elfogadható $\Leftrightarrow$ $CR < 10\%$.

Frobenius tétel

- $A \in R^{n \times n}$ nem negatív, irreducibilis mátrix és λ_{max} a maximális sajátértéke.
- $Aw = \lambda_{max} w$

Sekitani, Yamaka [1998]

$$\max_{x \geq 0} \min_i \left(\frac{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j}{x_i} \right) = \lambda_{max} = \min_{x \geq 0} \max_i \left(\frac{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j}{x_i} \right),$$

akkor és csak akkor, ha $w > 0$

- új logaritmizált változókkal

$$z_i = \log w_i \qquad\qquad x_{ij} = \log a_{ij}$$

Max. sajátérték meghatározása (Convex NLP)

$$\min t \quad s.t. \quad \underbrace{\sum_{j=1}^n e^{x_{ij}+z_j-z_i}}_{konvex} \leq t, \forall i$$

Mixed integer nonlinear programming
MINLP No.1

CR_{elf} legyen adott

Mi az a minimális mátrix elemszám, amelyet módosítva ($A \Rightarrow A^*$) teljesül: $CR(A^*) \leq CR_{elf}$?

$$
\begin{array}{ll}
\min & \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} y_{ij} \\
\text{s.t.} & \begin{array}{rcll}
\sum_{j=1}^{n} e^{x_{ij}+z_j-z_i} & \leq & \gamma, & \forall i \\
x_{ij} & = & -x_{ji}, & 1 \leq i < j \leq n, \\
-\bar{M} \leq x_{ij} & \leq & \bar{M}, & 1 \leq i < j \leq n, \\
-2\bar{M} y_{ij} \leq x_{ij} - \bar{a}_{ij} & \leq & 2\bar{M} y_{ij}, & 1 \leq i < j \leq n, \\
y_{ij} & \in & \{0,1\}, & 1 \leq i < j \leq n,
\end{array}
\end{array}
$$

---

ahol

$$
\begin{array}{rcl}
\gamma & = & n + CR_{elf}(n-1)RI_n \\
z_{ij} & = & log\, w_{ij} \\
\bar{M} & = & log(M) \\
\bar{a}_{ij} & = & log(a_{ij})
\end{array}
$$

MINLP No.3

K adott

Legfeljebb K elem megváltoztatásával $\Rightarrow$ $min\ CR(A^*)$?

$$
\begin{array}{llcll}
\min & \gamma & & & \\
\text{s.t.} & \sum_{j=1}^{n} e^{x_{ij}+z_j-z_i} & \leq & \gamma, & \forall i \\
 & x_{ij} & = & -x_{ji}, & 1 \leq i < j \leq n, \\
 & -\bar{M} \leq x_{ij} & \leq & \bar{M}, & 1 \leq i < j \leq n, \\
 & -2\bar{M}y_{ij} \leq x_{ij} - \bar{a}_{ij} & \leq & 2\bar{M}y_{ij}, & 1 \leq i < j \leq n, \\
 & y_{ij} & \in & \{0,1\}, & 1 \leq i < j \leq n, \\
 & \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} y_{ij} & \leq & K &
\end{array}
$$

---

ahol

$$
\begin{array}{rcl}
\gamma & = & n + CR(A)(n-1)RI_n \\
z_{ij} & = & log\, w_{ij} \\
\bar{M} & = & log(M) \\
\bar{a}_{ij} & = & log(a_{ij})
\end{array}
$$

Numerikus eredmények MATLAB-ban

ingyenesen hozzáférhető megoldók

MIP Solver

- IP

MINLP Solver

- fminconset
- bnb20

MINLP megoldók

- Branch-and-Bound algorimus alapján dolgoznak
- biztosítják a globális optimumot convex nem lineáris kevert egészértékű feladatoknák.
- leírása megtalálható a Bussieck és Vigerske (2010) [5] cikkében

Példa: 6×6 mátrix, “megoldva” a ...

MIP No.4 (*min CM*)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/5 & 3 & 7 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & 1/5 & 5 & 3 \\ 5 & 1/3 & 1 & 3 & 5 & 3 \\ 1/3 & 5 & 1/3 & 1 & 3 & 3 \\ 1/7 & 1/5 & 1/5 & 1/3 & 1 & 1/3 \\ 1/5 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad CM = 0,978$$

$$A_1^* = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/5 & 3 & 7 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & 1,51 & 5 & 3 \\ 5 & 1/3 & 1 & 3 & 5 & 3 \\ 1/3 & 0,65 & 1/3 & 1 & 3 & 3 \\ 1/7 & 1/5 & 1/5 & 1/3 & 1 & 1/3 \\ 1/5 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad CM = 0,880$$

$$A_2^* = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1,15 & 3 & 7 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & 2,95 & 5 & 3 \\ 0,87 & 1/3 & 1 & 3 & 5 & 3 \\ 1/3 & 0,34 & 1/3 & 1 & 3 & 3 \\ 1/7 & 1/5 & 1/5 & 1/3 & 1 & 1/3 \\ 1/5 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad CM = 0,800$$

$$A_3^* = \begin{pmatrix} 1 & 0,97 & 1,56 & 3 & 7 & 5 \\ 1,03 & 1 & 3 & 3 & 5 & 3 \\ 0,64 & 1/3 & 1 & 3 & 5 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1 & 3 & 3 \\ 1/7 & 1/5 & 1/5 & 1/3 & 1 & 1/3 \\ 1/5 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad CM = 0,667$$

MINLP No.3 (*min CR*)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/5 & 3 & 7 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & 1/5 & 5 & 3 \\ 5 & 1/3 & 1 & 3 & 5 & 3 \\ 1/3 & 5 & 1/3 & 1 & 3 & 3 \\ 1/7 & 1/5 & 1/5 & 1/3 & 1 & 1/3 \\ 1/5 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad CR = 34,71\%$$

$$A_1^* = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/5 & 3 & 7 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & 3,54 & 5 & 3 \\ 5 & 1/3 & 1 & 3 & 5 & 3 \\ 1/3 & 0,65 & 1/3 & 1 & 3 & 3 \\ 1/7 & 1/5 & 1/5 & 1/3 & 1 & 1/3 \\ 1/5 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad CR = 13,90\%$$

$$A_2^* = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1,22 & 3 & 7 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & 3,35 & 5 & 3 \\ 0,87 & 1/3 & 1 & 3 & 5 & 3 \\ 1/3 & 0,34 & 1/3 & 1 & 3 & 3 \\ 1/7 & 1/5 & 1/5 & 1/3 & 1 & 1/3 \\ 1/5 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad CR = 7,3\%$$

$$A_3^* = \begin{pmatrix} 1 & 1,01 & 1,67 & 3 & 7 & 5 \\ 1,03 & 1 & 3 & 2,56 & 5 & 3 \\ 0,64 & 1/3 & 1 & 3 & 5 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1 & 3 & 3 \\ 1/7 & 1/5 & 1/5 & 1/3 & 1 & 1/3 \\ 1/5 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad CR = 4,90\%$$

Más indexekre is létezik ez a hasonlóság?

További következetlenségi mutatók vizsgálata:

- Triádokra determinánsára épülő $\widetilde{CI}$
- A végső súlyok és a mátrix elemek eltérésén alapuló GCI

$\widetilde{CI}$ következetlenségi index

Lamata és Paláez ötlete [3]

Triád $det = 0 \Leftrightarrow$ ha a triád konzisztens $\Rightarrow$ determinánsok átlag $\widetilde{CI}$:

$$\widetilde{CI} = \frac{1}{NT}\sum_{i=1}^{NT} det(\Gamma_i), \text{ ahol } NT = \frac{n!}{(n-3)!3!}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{ij} & a_{ik} \\ 1/a_{ij} & 1 & a_{jk} \\ 1/a_{ik} & 1/a_{jk} & 1 \end{pmatrix}$$

- az (i,j,k) objektumokat összehasonlító $\Gamma \in R^{3\times 3}$ triád (Sarrus szabály):

$$det(\Gamma) = \frac{a_{ik}}{a_{ij}a_{jk}} + \frac{a_{ij}a_{jk}}{a_{ik}} - 2 \quad \Rightarrow \quad det(\Gamma) = e^{x_{ik}-x_{ij}-x_{jk}} + e^{x_{ij}+x_{jk}-x_{ik}} - 2$$

$\widetilde{CI}$ MINLP No.1

Határ: $\widetilde{CI}_{elf}$ adott

Minimálisan hány elem megváltoztatása $\Rightarrow \widetilde{CI}(A^*) \leq \widetilde{CI}_{elf}$?

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} y_{ij}$$

$$\begin{array}{lrcl}
\text{s.t.} & \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} \left(e^{x_{ik}-x_{ij}-x_{jk}} + e^{x_{ij}+x_{jk}-x_{ik}} \right) & \leq & c^*, \\
& x_{ij} & = & -x_{ji}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\
& -\bar{M} \leq x_{ij} & \leq & \bar{M}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\
& -2\bar{M} y_{ij} \leq x_{ij} - \bar{a}_{ij} & \leq & 2\bar{M} y_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\
& y_{ij} & \in & \{0, 1\}, \quad 1 \leq i < j \leq n,
\end{array}$$

---

ahol

$$\begin{array}{rcl}
c^* & = & (\widetilde{CI}_{elf} + 2) \frac{n!}{(n-3)!3!} \\
\bar{M} & = & log(M) \\
\bar{a}_{ij} & = & log(a_{ij})
\end{array}$$

$\widetilde{CI}$ MINLP No.2

K adott

Legfeljebb K elem megváltoztatása $\Rightarrow$ *min* $\widetilde{CI}(A^*)$?

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} \left(e^{x_{ik}-x_{ij}-x_{jk}} + e^{x_{ij}+x_{jk}-x_{ik}} \right) = c$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.} \qquad x_{ij} &= -x_{ji}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\
-\bar{M} \leq x_{ij} &\leq \bar{M}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\
-2\bar{M}y_{ij} \leq x_{ij} - \bar{a}_{ij} &\leq 2\bar{M}y_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\
y_{ij} &\in \{0,1\}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\
\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} y_{ij} &\leq K
\end{aligned}$$

---

ahol

$$\begin{aligned}
\widetilde{CI}(A) &= c/\tfrac{n!}{(n-3)!3!} - 2 \\
\bar{M} &= log(M) \\
\bar{a}_{ij} &= log(a_{ij})
\end{aligned}$$

Geometriai konzisztencia index –*GCI* –

Aguarón és Moreno-Jiménez (2003) alapgondolat [1]

Egy konzisztens A páros összehasonlítási mátrixból számított súlyvektor i és j komponenseinek hányadosa egyenlő a mátrix (i, j) elemével. $\frac{w_i}{wj} = a_{ij}$

GCI, majd logaritmizált váktozókkal ($z_i = log(w_i)$):

$$\frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \log^2 \left(a_{ij} \frac{w_j}{w_i} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (x_{ij} + z_j - z_i)^2$$

Nehézség

Végső súlyvektor jelenléte! $\Rightarrow \lambda_{max}$ tartozó sajátérték komponensek. *CR*-nél hasonló, DE:

- célfüggvénybe nem lehet a λ_{max}
- nincs előre adott λ_{max}

- Sajátvektor egyenlet $Aw = \lambda w$ komponensekre szedve:

$$\frac{(Aw)_i}{w_i} = \lambda, \ \forall \ i$$

$$\frac{(Aw)_i}{w_i} = \frac{(Aw)_j}{w_j}, \ \forall \ i \neq j$$

$$\frac{(Aw)_i}{w_i} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{(Aw)_j}{w_j}, \ \forall \ i$$

- Ha $w > 0$ akkor a Frobenius tétel miatt w sajátvektor a λ_{max} sajátértékhez tatrozik.
- Legyen $z_i = log(w_i), \ w > 0$ és $x_{ij} = log(a_{ij})$

$$\sum_{j=1}^{n} e^{x_{ij}+z_j-z_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} e^{x_{ij}+z_j-z_i}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

Határ: GCI_{elf} adott

Minimálisan hány elem megváltoztatása $\Rightarrow GCI(A) \leq GCI_{elf}$?

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} y_{ij} & & \\
\text{s.t.} & \displaystyle\frac{2}{(n-1)(n-2)}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(x_{ij}+z_j-z_i)^2 & \leq & GCI_{elf}, \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} e^{x_{ij}+z_j-z_i} & = & \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} e^{x_{ij}+z_j-z_i}, \quad 1 \leq i \leq n, \\
& x_{ij} & = & -x_{ji}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\
& -\bar{M} \leq x_{ij} & \leq & \bar{M}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\
& -2\bar{M}y_{ij} \leq x_{ij} - \bar{a}_{ij} & \leq & 2\bar{M}y_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\
& y_{ij} & \in & \{0,1\}, \quad 1 \leq i < j \leq n,
\end{array}
$$

---

ahol

$$
\begin{array}{rcl}
z_i & = & log(w_i) \\
\bar{M} & = & log(M) \\
\bar{a}_{ij} & = & log(a_{ij})
\end{array}
$$

GCI MINLP No.2

K adott

Legfeljebb K elem megváltoztatása $\Rightarrow$ *min* $GCI(A^*)$?

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (x_{ij} + z_j - z_i)^2 \; = g$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} e^{x_{ij}+z_j-z_i} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} e^{x_{ij}+z_j-z_i}, \quad 1 \le i \le n, \\ x_{ij} &= -x_{ji}, \quad 1 \le i < j \le n, \\ -\bar{M} \le x_{ij} &\le \bar{M}, \quad 1 \le i < j \le n, \\ -2\bar{M}y_{ij} \le x_{ij} - \bar{a}_{ij} &\le 2\bar{M}y_{ij}, \quad 1 \le i < j \le n, \\ y_{ij} &\in \{0,1\}, \quad 1 \le i < j \le n, \\ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} y_{ij} &\le K \end{aligned}$$

---

ahol

$$\begin{aligned} GCI(A) &= g \frac{2}{(n-1)(n-2)} \\ z_i &= log(w_i) \\ \bar{M} &= log(M) \\ \bar{a}_{ij} &= log(a_{ij}) \end{aligned}$$

References No.1

- Aguarón, J., Moreno-Jiménez, J.M. [2003]: The geometric consistency index: Approximated thresholds, *European Journal of Operation Research* **147**, pp. 137-145.
- Bozóki, S., Rapcsák, T. [2008]: On Saaty's and Koczkodaj's inconsistencies of pairwise comparison matrices, *Journal of Global Optimalization* **42**(2), pp. 139-148.
- Bozóki, S., Fülöp, J., Koczkodaj, W.W. [2010]: LP-based consistency-driven supervision for incomplete pairwise comparison matrices, *Working Paper*, WP 2010-1.
- Bozóki, S., Fülöp, J., Poesz, A. [2010]: On pairwise comparison matrices that can be made consistent by modification of a few elements, *Central European Journal of Operation Research* (in print). DOI 10.1007/s10100-010-0136-9
- Bussieck, M.R., Vigerske, S.[2010]: MINLP Solver Software, *Wiley Enciklopedia of Operation Research and Management Science* (in print)
- Kéri, G. [2005]: Kritériumok páros összehasonlítás mátrixokra (In Hungarian), *Szigma*, **36**, pp. 139-148.

References No.2

- Kindler, J., Papp O. [1977]: Komplex rendszerek vizsgálata (In Hungarian), *Műszaki Könyvkiadó*, Budapest.
- Koczkodaj, W.W [1993]: A new definition of consistency of pairwise comparisons, *Mathematical and computer modelling*, **18**, pp. 79-84.
- Lamata, M.T., Peláez, J.I. [2003]: A New Measure of Consistency for Positive Reciprocal Matrices, *Computers and Mathematics with Applications*, **46**, pp. 1839-1845
- Poesz, A. [2008]: A páros összehasonlítás mátrixok kritikus értékeinek detektálása (In Hungarian), TDK dolgozat, Budapesti Corvinus Egyetem, Budapest.
- Poesz, A. [2008]: Inconsistency analysis of empirical pairwise comparison matrices, Thesis, University of Budapest, Department of Decisions in Economics, Budapest.
- Saaty, T.L [1980]: The analytic hierarchy process, *McGraw-Hill*, New-York.
- Sekitana, K., Yamaki, N. [1998]: A logical interpretation for the eigenvalue method in AHP, *Journal of the Operations Research*, **42**, pp. 219-232.

Köszönöm a figyelmet!