

A Condorcet-paradoxon intranzitív dobókockákkal

Bozóki Sándor – Csató László – Temesi József

Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék
Budapesti Corvinus Egyetem

Kivonat

Condorcet híres szavazási szituációja rámutatott, hogy a tranzitív egyéni preferenciarelációk egyszerű többségi elvvel történő aggregálása nem feltétlenül tranzitív. A dolgozatban Condorcet modelljének egy olyan átfogalmazását vizsgáljuk meg, amelyben a jelölteket független diszkrét valószínűségi változókkal (dobókockákkal), a jelöltek különböző sorrendjeinek szavazói támogatottságát – gyakoriságát – pedig valószínűségekkel helyettesítjük. Arra a kérdésre keressük a választ, hogy a Condorcet-paradoxon megvalósítható-e olyan dobókockakészlettel, amelyben minden dobókocka legfeljebb három oldalú. Megmutatjuk, hogy a feladatra végtelen sok megoldás adható explicit alakban, ezek közül két olyan változatot is bemutatunk, amelyekben egy dobókocka három, két dobókocka pedig két oldalú. Igazoljuk továbbá, hogy ennél kevesebb oldallal nem reprodukálható a Condorcet-paradoxon.

1. Bevezetés

Tanulmányunk egyesekben azt a képzetet keltheti, hogy az intranzitív dobókockák a matematikai játékok vagy a matematikusok játékaik között igazolhatóbb módon szerepelhetnének, mint egy komoly tudományos kötetben. Több érvet is fel tudunk hozni védelmünkre, s ezek mindegyike szorosan kapcsolható az ünnepelt személyéhez.

A tanulmány legidősebb szerzője 1968-ban felvételizett az egyetemre. A felvételi bizottságban ülő ifjú tanársegéd gyötrő unalmát azzal űzte el, hogy a jeles matematikai dolgozatot írt felvételizőknek különböző tréfás logikai feladatokat és érdekes matematikatörténeti feladványokat fogalmazott meg, kíváncsian várva az izzadó jelöltek frappáns válaszait. Az ifjú tanársegédet Zalai Ernőnek hívták. Mondanunk sem kell, hogy a felvételizők kevésbé jól szórakoztak, mint ő, de becsületére legyen mondva, a válaszok nem befolyásolták az amúgy jól teljesítők osztályzatait. Az egyik felvételizővel (akinek történetesen Temesi József volt a neve) a Zénon paradoxonokról folyt a szó, Akhilleusz és a teknősbéka esetével megvilágítva a végtelen sorok természetét, természetesen némi filozófiai társalgással kiegészítve azt. 45 év után végre megadatik az akkori felvételizőnek, hogy a Condorcet paradoxonok nem tradicionális tárgyalásával visszaadja a kölcsönt.

De fordítsuk komolyabbra a szót. Az Ernő által magas szinten művelt matematikai közgazdaságtan alapját alkotó preferenciaelmélet egyik kulcsfogalma a tranzitivitás. A társadalmi választások elméletében a preferenciák aggregálása izgalmas kérdéskör, híres

eredményekkel. Condorcet márki, ha nem is olyan antik szerző, mint Zénon, ám a szavazások területén legalább olyan híres paradoxonokat fogalmazott meg a XVIII. században, mint ő.

Tanulmányunk Condorcet paradoxonokat megvalósító dobókockák konstruálását mutatja be, ezáltal összekötve ezeknek a dobókockáknak az elméletét a szavazási eljárásokkal. Ez pedig már a jelenbe, a Zalai Ernő által vezetett Közgazdaságtani Doktori Iskolához vezet el bennünket, hiszen a másik két szerző ennek az Iskolának volt és jelenlegi tagja, ily módon Ernő tanítványai. Végül e kissé hosszabbra nyúlt bevezetésben emlékezzünk meg egy olyan matematikusról, aki éppen ebben a Doktori Iskolában sokáig lelkesen dolgozott együtt Ernővel, s aki minden bizonnyal velünk együtt üdvözölte volna őt ebben a kötetben, ám ez már nem adatott meg neki: Rapcsák Tamás baráti tisztelgését így mi közvetítjük.

2. A Condorcet-paradoxon

Condorcet nevéhez számos szavazáseméleti paradoxon fűződik [4], ezért a címben szereplő határozott névelőt azzal indokoljuk, hogy jelen cikkben ezek közül lényegében csak egygel foglalkozunk.¹ Tekintsünk egy 60 szavazóból álló csoportot, amelynek három jelölt, A , és C közül kell győztest hirdetni. Minden szavazó egyértelmű preferenciasorrenddel rendelkezik [2, 61. o.], [10, 141. o.]:²

$$A \succ B \succ C : 23 \text{ fő};$$

$$A \succ C \succ B : 0 \text{ fő};$$

$$B \succ A \succ C : 2 \text{ fő};$$

$$B \succ C \succ A : 17 \text{ fő};$$

$$C \succ A \succ B : 10 \text{ fő};$$

$$C \succ B \succ A : 8 \text{ fő}.$$

Ha a jelölteket páronként hasonlítjuk össze, akkor $A \succ B$ 33 fő, $B \succ C$ 42 fő és $C \succ A$ 35 fő véleménye szerint, ami mindhárom esetben több, mint a szavazók fele. Ez az eredmény azonban megsérti a tranzitivitás követelményét, hiszen nem található olyan jelölt, aki egyértelműen a legjobb lenne, azaz mindenki mással szemben őt választanák.

3. Intranszitiv dobókockák

Bevezetésül tekintsük az alábbi három dobókockát [7]: az **A** kocka hat oldala közül ötre 4-est, a hatodikra 1-est; a **B** kocka öt oldalára 3-ast, a hatodikra 6-ost; a **C** kocka három oldalára 2-est, három oldalára 5-öst írunk. A kockák minden oldala azonos ($1/6$) valószínűséggel kerül felülre. A kockákat páronként versenyeztetjük egymással abban az értelemben, hogy elegendően sokszor egyszerre feldobjuk őket és megszámloljuk, hány-szor jött ki nagyobb szám az egyik kockán, mint a másikon. Már néhány tíz dobás után

¹ Kivéve a 6. fejezetben szereplő 3. Állítást.

² A szigorú preferenciarelációt a \succ szimbólummal jelöljük.

jól kirajzolódnak az egyébként is könnyen ellenőrizhető valószínűségek: $P(\mathbf{A} > \mathbf{B}) = 25/36$, $P(\mathbf{B} > \mathbf{C}) = 21/36$, $P(\mathbf{C} > \mathbf{A}) = 21/36$. A három kocka között tehát nincs legjobb, hiszen bármelyikhez tudunk olyat találni, amelyik őt $1/2$ -nél nagyobb valószínűséggel legyőzi. Tehát levonhatjuk azt a következtetést, hogy valószínűségi változók között az „ $1/2$ -nél nagyobb valószínűséggel nagyobb” bináris reláció nem mindig tranzitív.

A továbbiakban dobókockának hívunk minden diszkrét valószínűségi változót, vagyis nem ragaszkodunk sem ahhoz, hogy pontosan hat oldala legyen, sem ahhoz, hogy az egyes oldalak azonos valószínűséggel rendelkezzenek.

Steinhaus és Trybula [8] három diszkrét valószínűségi változót ($\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$) adott meg, amelyekre

$$P(\mathbf{A} > \mathbf{B}) = P(\mathbf{B} > \mathbf{C}) = P(\mathbf{C} > \mathbf{A}) = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.618.$$

Azt is megmutatták, hogy az aranymetszés arányának reciproka egyben felső korlát a valószínűségekre, ha azok egyenlők:

1. Tétel. (Steinhaus, Trybula [8]): *Tetszőleges $p > (\sqrt{5} - 1)/2$ valószínűség esetén nem léteznek $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ független valószínűségi változók, amelyekre $P(\mathbf{A} > \mathbf{B}) = P(\mathbf{B} > \mathbf{C}) = P(\mathbf{C} > \mathbf{A}) = p$.*

Trybula megvizsgálta azt az esetet is, amikor a $P(\mathbf{A} > \mathbf{B})$, $P(\mathbf{B} > \mathbf{C})$, $P(\mathbf{C} > \mathbf{A})$ valószínűségek nem feltétlenül egyenlők, és felső becslést adott ezek összegére, illetve szorzatára.

2. Tétel. (Trybula [11, 328-329. o.]): *Tetszőleges $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ független valószínűségi változókra*

$$\begin{aligned} P(\mathbf{A} > \mathbf{B}) + P(\mathbf{B} > \mathbf{C}) + P(\mathbf{C} > \mathbf{A}) &\leq 2, \\ P(\mathbf{A} > \mathbf{B})P(\mathbf{B} > \mathbf{C})P(\mathbf{C} > \mathbf{A}) &\leq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Moon és Moser [6] olyan bajnokságra mutatott példát, amelyben három csapat mérkőzik meg egymással. Ezek mindegyikében három-három játékos szerepel, akiket az erősségük alapján egy számmal jellemezünk: $\mathbf{A} = \{2,6,7\}$, $\mathbf{B} = \{1,5,9\}$, $\mathbf{C} = \{3,4,8\}$. Két csapat összehasonlítása alatt a csapatokból kiválasztott egy-egy játékos egyéni mérkőzéseinek összesített eredményét értjük. Az egyéni mérkőzések során nem fordulhat elő döntetlen, hiszen a játékosok erőssége különböző, és egy jobb játékos biztosan legyőzi a nála gyengébbet. A csapatok közötti eredmény sem lehet döntetlen, hiszen páratlan sok (kilenc) egyéni mérkőzés aggregálásából adódik. Könnyen ellenőrizhető, hogy az \mathbf{A} csapat öt mérkőzést nyer a \mathbf{B} csapat ellen, csakúgy, mint a \mathbf{B} a \mathbf{C} ellen, illetve a \mathbf{C} az \mathbf{A} ellen. A konstrukció egyúttal egy intranzitív dobókockakészlet is, ha az $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ diszkrét valószínűségi változókat úgy definiáljuk, hogy azonos $(1/3)$ valószínűséggel veszik fel a megadott értékeket, mivel ekkor a fentiek alapján $P(\mathbf{A} > \mathbf{B}) = P(\mathbf{B} > \mathbf{C}) = P(\mathbf{C} > \mathbf{A}) = 5/9$.

Az intranzitív dobókockák iránt érdeklődő Olvasó figyelmébe ajánljuk Székely Gábor könyvét [9, 13.6. fejezet], Gardner [3] és Jackson [5] cikkeit, valamint jelen tanulmány egyik szerzőjének friss eredményeit [1].

4. A Condorcet-paradoxont megvalósító dobókockák

A Condorcet-paradoxon és az intranszitiv dobókockák közös tulajdonsága, hogy sérül a bináris relációkra vonatkozó egyik legtermészetesebb feltétel, a tranzitivitás. De található-e a két modell között ennél szorosabb kapcsolat? Ha a szavazás során választható jelöltek egy-egy valószínűségi változóval, míg a jelöltek között fennálló preferenciarelációkat a valószínűségi változók értékeinek nagyság szerinti összehasonlításával azonosítjuk, akkor az egyes sorrendek szavazói támogatottsága valószínűségként értelmezhető. A különböző preferenciákkal rendelkező szavazói csoportok arányának valószínűségekkel történő helyettesítése Gehrlein könyvében is megjelenik [4, 81. o.]. Mindkét interpretáció az adott preferencia *gyakoriságát* fejezi ki.

Ebben a fejezetben először bemutatjuk állításunkat, majd összefoglaljuk a megoldáshoz vezető út legfontosabb lépéseit.

1. Állítás. A

$$\begin{aligned} P(\mathbf{A} = 1) &= \frac{333}{828}, & P(\mathbf{A} = 3) &= \frac{35}{828}, & P(\mathbf{A} = 5) &= \frac{460}{828}; \\ P(\mathbf{B} = 4) &= \frac{99}{100}, & P(\mathbf{B} = 7) &= \frac{1}{100}; \\ P(\mathbf{C} = 2) &= \frac{23}{33}, & P(\mathbf{C} = 6) &= \frac{10}{33} \end{aligned}$$

dobókockák megvalósítják a 2. fejezetben szereplő Condorcet-paradoxonnak megfelelő

$$\begin{aligned} P(\mathbf{A} > \mathbf{B} > \mathbf{C}) &= \frac{23}{60}, & (5 > 4 > 2); \\ P(\mathbf{A} > \mathbf{C} > \mathbf{B}) &= 0; \\ P(\mathbf{B} > \mathbf{A} > \mathbf{C}) &= \frac{2}{60}, & (4 > 3 > 2, 7 > 3 > 2, 7 > 5 > 2); \\ P(\mathbf{B} > \mathbf{C} > \mathbf{A}) &= \frac{17}{60}, & (4 > 2 > 1, 7 > 2 > 1, 7 > 6 > 1, 7 > 6 > 3, 7 > 6 > 5); \\ P(\mathbf{C} > \mathbf{A} > \mathbf{B}) &= \frac{10}{60}, & (6 > 5 > 4); \\ P(\mathbf{C} > \mathbf{B} > \mathbf{A}) &= \frac{8}{60}, & (6 > 4 > 1, 6 > 4 > 3) \end{aligned}$$

valószínűségeket.

Bizonyítás. Elemi úton elvégezhető, segítségül az állításban a valószínűségek után zárójelben megadtuk, hogy mely esetekben fordulhatnak elő az egyes sorrendek. Például az $\mathbf{A} > \mathbf{B} > \mathbf{C}$ kimenetel csak úgy állhat elő, ha az \mathbf{A} dobókockával 5-öst, a \mathbf{B} dobókockával 4-est és a \mathbf{C} dobókockával 2-est dobunk. \square

A fenti konstrukcióhoz vezető út három fő lépésben foglalható össze. Elsőként írjuk

fel az $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ diszkrét valószínűségi változókat az alábbi paraméteres formában:³

$$\begin{aligned} P(\mathbf{X} = X_1) &= p, & P(\mathbf{X} = X_2) &= q, & P(\mathbf{X} = X_3) &= 1 - p - q; \\ P(\mathbf{Y} = Y_1) &= r, & P(\mathbf{Y} = Y_2) &= s, & P(\mathbf{Y} = Y_3) &= 1 - r - s; \\ P(\mathbf{Z} = Z_1) &= t, & P(\mathbf{Z} = Z_2) &= u, & P(\mathbf{Z} = Z_3) &= 1 - t - u. \end{aligned}$$

Második lépésként rögzítsük az $X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3, Z_1, Z_2, Z_3$ értékeket. Feltehető, hogy mindegyik különböző és 1-9 közötti egész szám, továbbá az értékhármassok belső sorrendjei közül elegendő egyet tekinteni. Az így felírható $\binom{9}{3,3,3} = 1680$ lehetőség egy részét kizárhatjuk a további vizsgálatokból, mert például ha \mathbf{X} az 1, 2, 3, \mathbf{Y} a 4, 5, 6 és \mathbf{Z} a 7, 8, 9 értékeket veheti fel, akkor $P(\mathbf{X} < \mathbf{Y} < \mathbf{Z}) = 1$, míg a többi öt sorrend egyike sem fordulhat elő. Intuitív alapon az $X_1 = 1, X_2 = 4, X_3 = 7, Y_1 = 2, Y_2 = 5, Y_3 = 8, Z_1 = 3, Z_2 = 6, Z_3 = 9$ értékeket próbáltuk ki, mert így mindhárom valószínűségi változó felvehet kis, közepes és nagy értéket is, ezért az egyes sorrendek kellően sokféleképpen fordulhatnak elő.⁴

A harmadik lépésben az $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}\}$ halmaz mind a hat permutációját megfeleltetjük az $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$ halmazzal, felírjuk a hatféle sorrendre (például $\mathbf{A} > \mathbf{B} > \mathbf{C}$) vonatkozó valószínűségi feltételeket és a kapott egyenletrendszer $\{p, q, r, s, t, u\}$ megoldásai közül kiválogatjuk azokat, amelyekben minden változó a $[0,1]$ intervallumban van.

E dolgozat keretein messze túlmutat annak analitikus vizsgálata, hogy a harmadik lépésben szereplő hat permutációhoz tartozó egyenletrendszerek közül melyeknek van $\{p, q, r, s, t, u\} \in [0,1]$ megoldása, csakúgy, mint a megoldások halmazának jellemzése. Arra viszont vállalkozhatunk, hogy mutatunk egy konkrét megoldást. Tapasztalataink alapján az $\mathbf{A} = \mathbf{X}, \mathbf{B} = \mathbf{Z}, \mathbf{C} = \mathbf{Y}$ megfeleltetéshez tartozó

$$\begin{aligned} (1-p)rt + (1-p-q)(r+s)u &= \frac{23}{60}, \\ (1-p-q)st &= 0, \\ qr(1-t) + (1-p-q)(r+s)(1-t-u) &= \frac{2}{60}, \\ pr + (p+q)s(1-t) + (1-r-s)(1-t-u) &= \frac{17}{60}, \\ q(1-r)t + (1-p-q)(1-r-s)(t+u) &= \frac{10}{60}, \\ p(1-r)t + (p+q)(1-r-s)u &= \frac{8}{60} \end{aligned}$$

többváltozós polinomrendszert a Maple program *solve* parancsával megoldva – a valós számok halmazán maradván – három megoldáscsaládot kapunk úgy, hogy mindegyikben

³ A Condorcet-paradoxonban szereplő hat – igazából csak öt, mert az egyes sorrendek valószínűségének összege 1 – változó intuitív alapon azt sugallja, hogy három darab három oldalú kockával már előállítható, mivel ezek oldalainak valószínűsége tetszőlegesen megválasztható.

⁴ Nem titkoljuk: az első ötlet nem ez volt, hanem – a 3. fejezetben említett – Moon-Moser konstrukció megfelelője, vagyis az $X_1 = 2, X_2 = 6, X_3 = 7, Y_1 = 1, Y_2 = 5, Y_3 = 9, Z_1 = 3, Z_2 = 4, Z_3 = 8$ értékadás. Utólag már nem meglepő, miért nem vezetett sikerre ez az első próbálkozás. Vegyük észre, hogy az ugyanazon kockára írt szomszédos értékek (6-7, illetve 3-4) a sorrendek szempontjából nem különböztethetők meg, így az ilyen kockák már nem három, hanem csak két oldalúak, ezért jelentősen csökken az egyes sorrendek előfordulásának kombinációs lehetősége. Ezt a megfigyelést a 2. Állítás bizonyítása során is használni fogjuk.

egy szabad változó szerepel. Ennek léte abból következik, hogy a hat egyenlet nem független egymástól: bármelyik ötből következik a hatodik, hiszen teljes eseményrendszert írtunk fel, a hat lehetséges sorrend előfordulási valószínűségeinek összege 1. A három megoldáscsalád közül egy különösen tetszetős:

$$\begin{aligned} s \text{ szabad változó,} & & t = 0, & & u = \frac{99}{100}, \\ p = \frac{176s - 111}{12(33s - 23)}, & & q = \frac{35}{36(23 - 33s)}, & & r = \frac{23}{33 - s}. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy $t = 0$ miatt a **Z** dobókocka nem három, hanem csak két oldalú. s értéke ugyan tetszőlegesen megválasztható a $[0,1]$ intervallumból, de nem minden választás fog $[0,1]$ -beli p, q, r értékeket eredményezni. Ha azonban $0 \leq s \leq 111/176 = 0.63068\bar{1}$, akkor $0 \leq p, q, r \leq 1$, tehát végtelen sok olyan kockakészlet adható meg, amely reprodukálja a Condorcet-paradoxont. Ezek közül kiemelnénk az $s = 0$ választást, ekkor ugyanis még egy oldal elhagyható, ezúttal az **Y** kockáról, így adódnak az 1. Állításban felírt

$$p = \frac{333}{828}, \quad q = \frac{35}{828}, \quad r = \frac{23}{33}$$

valószínűségek. Mivel az s -hez tartozó 5-ös és a t -hez tartozó 7-es oldalakat nem használtuk fel, az oldalakat átcímkezhethetjük úgy, hogy 1 és 7 közötti egész számok szerepeljenek, megtartva a nagyság szerinti viszonyokat.

Ha pedig $s = 111/176$, akkor

$$p = 0, \quad q = \frac{4}{9}, \quad r = \frac{35}{528}$$

adódik; ez szintén egy olyan kockakészletet jelent, amelyben egy kocka három, két kocka pedig két oldalú. Az erre a dobókockakészletre vonatkozó, az 1. Állítással analóg eredmény kimondását és ellenőrzését az Olvasóra bízunk.

5. A Condorcet-paradoxont megvalósító dobókockakészlet minimalitása

A következőkben belátjuk, hogy a Condorcet-paradoxont reprodukáló, az 1. Állításban bemutatott dobókockakészlet minimális olyan értelemben, hogy három, összességében legfeljebb hat oldalú kockával nem lehet előállítani az egyes sorrendek kívánt valószínűségeit.

Elsőként tegyük fel, hogy mindhárom kocka (**A**, **B** és **C**) legfeljebb két oldalú. Ha rögzítjük az egyes oldalakra írt számokat, csupán ezek „nagysága”, a kimenetel valószínűsége marad kérdéses, amely három, $\{p, q, r\} \in [0,1]$ potenciális változót jelent. Ekkor a $P(\mathbf{A} > \mathbf{B} > \mathbf{C})$ alakú lehetséges sorrendek valószínűségeinek mindegyike kifejezhető ezen három ismeretlen függvényében, mégpedig olyan nemnegatív tényezőket tartalmazó szorzatok összegeként, amelyekben csupán p, q és r , illetve $1 - p, 1 - q$ és $1 - r$ szerepelhetnek. Ezek összege akkor és csak akkor lehet 0, ha minden tagban legalább egy tényező 0, azaz legalább egy változó valamelyik szélsőértékét veszi fel. Ez pontosan azt jelenti, hogy létezik olyan kocka, amelyik egy oldalú. Ezek alapján megfogalmazható az alábbi megfigyelés.

1. Lemma. *Ha egy három alternatívát tartalmazó Condorcet-paradoxonban valamely sorrend valószínűsége 0, akkor három különböző, legfeljebb két oldalú kocka közül legalább az egyiknek egy oldalúnak kell lennie.*

Bizonyítás. A fentiek érvelés értelmében a $\{p, q, r\} \in [0,1]$ változók közül legalább egy felveszi valamelyik szélsőértékét, ezért a hozzá tartozó dobókocka egyik oldala 1, a másik pedig 0 valószínűségű, tehát lényegében egy oldalú. \square

2. Lemma. *A 2. fejezetben szereplő Condorcet-paradoxon nem állítható elő három, legfeljebb két oldalú dobókocka felhasználásával.*

Bizonyítás. Mivel a vizsgált Condorcet-paradoxonnak megfelelően $P(\mathbf{A} > \mathbf{C} > \mathbf{B}) = 0$, ezért az 1. Lemma alapján három, legfeljebb két oldalú kockával dolgozva legalább az egyiknek csak egy oldala van.

Most vizsgáljuk meg az összes lehetséges esetet. Az általánosság megsértése nélkül a kockák oldalaira írt, legfeljebb öt szám az 1 – 5 értékekkel képviselhető. Amennyiben eltekintünk a kockák elnevezésétől, az 1. táblázatban látható feliratok fordulhatnak elő, miután az egy oldalúnak feltételezett **A** kockán található 1-es, illetve 5-ös eleve kizárja a körbeverés lehetőségét, hiszen **B** és **C** is biztosan valószínűséggel nagyobb, illetve kisebb eredményt ad.

1. táblázat. Három, legfeljebb két oldalú kocka feliratai

Lehetséges eset	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9
A	2	2	2	3	3	3	4	4	4
B	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,2)	(1,4)	(1,5)	(1,5)	(2,5)	(3,5)
C	(4,5)	(3,5)	(3,4)	(4,5)	(2,5)	(2,4)	(2,3)	(1,3)	(1,2)

Jelölje q a **B**, míg r a **C** dobókockán szereplő kisebb szám előfordulásának valószínűségét.

Az E4 esetben biztosan nem állhat fenn a Condorcet-paradoxon, hiszen $P(\mathbf{C} > \mathbf{B} > \mathbf{A}) = 1$. E1 feliratnál $P(\mathbf{A} > \mathbf{C}) = 0$, E9-nél pedig $P(\mathbf{C} > \mathbf{A}) = 0$, vagyis mindkettőnél a hatból legalább három sorrend valószínűsége zérus, ami a vizsgált példában nem teljesül. Hasonlóan E2 fennállásakor $P(\mathbf{A} > \mathbf{C}) = 0$, E8-nál viszont $P(\mathbf{C} > \mathbf{A}) = 0$, így ezek sem adhatják a kívánt eredményt. Az E3 esetben $P(\mathbf{A} > \mathbf{C}) = 0$, a szimmetrikus E7 párnál pedig $P(\mathbf{C} > \mathbf{A}) = 0$, ismét legalább három nulla valószínűségű eseményt adva. Ebből már nyilvánvaló, hogy az E7, E8, E9 eseteket nem is kellene vizsgálni, hiszen mindegyik az első három eset megfelelője a következő relációban: $E1 \approx E9$, $E2 \approx E8$ és $E3 \approx E7$. Az ekvivalens esetekben a kockák feliratozása éppen ellentétes: ha az egyiknél egy adott sorrend bekövetkezési valószínűsége m , akkor a másikban ez a komplementer $1 - m$ valószínűség. Erre az észrevételre a továbbiakban még szükségünk lesz.

Végül E5 fennállásakor $P(\mathbf{A} > \mathbf{B} > \mathbf{C}) = P(\mathbf{B} > \mathbf{C} > \mathbf{A}) = 0$, míg E6 mellett $P(\mathbf{A} > \mathbf{B} > \mathbf{C}) = P(\mathbf{C} > \mathbf{B} > \mathbf{A}) = 0$, vagyis mindkettőnél két kimenetel valószínűsége is nulla, ami szintén nem igaz Condorcet példájára. Ezzel beláttuk, hogy három, legfeljebb két oldalú kockával valóban nem állítható elő a kívánt eredmény. \square

A lehetetlenség bizonyítására kétféle érvelést használtunk:

- ha egy kimenetel valószínűsége (a vizsgált példában $P(\mathbf{A} > \mathbf{C} > \mathbf{B})$) nulla, akkor található még egy olyan sorrend, amely sohasem következhet be (ellentétben a példával);
- a kockák feliratozása eleve kizárja a Condorcet-paradoxon előfordulását, a dobókockák körbeverését.

Könnyen látható, hogy mindkét kritérium független a kockák hatféle lehetséges megcímkezésétől (melyiket jelöljük \mathbf{A} -val, \mathbf{B} -vel, illetve \mathbf{C} -vel). Ez a későbbiekben már nem feltétlenül lesz igaz.

2. Állítás. *Az 1. Állításban szereplő dobókockakészlet a 2. fejezetben bemutatott Condorcet-paradoxont megvalósítók közül összoldalszám tekintetében (az egyik) minimális.*

Bizonyítás. A 2. Lemma szerint a vizsgált paradoxon kockaoldalszám szerint minimális előállítására most már csak azok a lehetőségek maradtak, amikor legalább egy kocka legalább három oldalú. Ha \mathbf{A} pontosan három oldalú, és mellette két egy oldalú van, akkor utóbbiak közül az egyik egy valószínűséggel legyőzi a másikat, legyen ez a \mathbf{B} . Így nem állhat elő a Condorcet-paradoxon, ha ugyanis \mathbf{C} jobb \mathbf{B} -nél, akkor \mathbf{A} -nál is, ha viszont \mathbf{A} legyőzi \mathbf{C} -t, akkor \mathbf{B} is.⁵ Ugyanezért nem található a példát kielégítő egy darab négy oldalú és két darab egy oldalú kockából álló hármas.

Emiatt csupán egyetlen lehetőség vizsgálata maradt hátra, amikor egy-egy három, két és egy oldalú kockánk van. Ismét feltehető, hogy az 1 – 6 értékek szerepelnek rajtuk. Jelölje q a két oldalú kockán a kisebb, míg r a három oldalún a legkisebb, s pedig a három oldalún a középső szám előfordulásának valószínűségét. Vegyük figyelembe, hogy a Condorcet-paradoxon ismét nem állhat elő, amennyiben egy kocka dominál egy másikat, vagyis minden rajta található szám nagyobb.⁶ Az ezt követően megmaradó lehetséges feliratok a 2. táblázatban találhatóak (egy előző megfigyelés alapján csak a későbbiekben lényeges szimmetrikus eseteket vizsgálva).

2. táblázat. Egy-egy három, két és egy oldalú kocka lényeges feliratai

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12
2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4
(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(1,4)	(2,4)	(1,5)	(2,5)	(1,6)	(2,6)	(2,5)	(2,6)
(4,5,6)	(3,5,6)	(3,4,6)	(3,4,5)	(2,5,6)	(1,5,6)	(2,4,6)	(1,4,6)	(2,4,5)	(1,4,5)	(1,3,6)	(1,3,5)

Amennyiben a három közül bármelyik kockán két szomszédos szám szerepel, az a kimenetek szempontjából olyan, mintha a kettő közül csak az egyik lenne megtalálható rajta az együttes előfordulási valószínűséggel, ezért az összes ilyen eset visszavezethető a korábban vizsgáltakra. Ennek megfelelően az F1-F4, F5-F6 és F9-F10 feliratokkal ellátott kockák úgy tekinthetők, mint három, legfeljebb két oldalú kocka. Ez nyilvánvalóan igaz a 2. táblázatban már be sem mutatott szimmetrikus esetekre is.

⁵ Az érvelés kulcsa, hogy egy oldalú kockák összehasonlításánál eltűnik a kimenetek bizonytalansága.

⁶ Hasonló alapon került sor bizonyos esetek kizárására a 4. fejezetben. A Condorcet-paradoxon lehetetlensége helyett az adott példa esetén úgy is érvelhetnénk, hogy legalább három kimenetel valószínűsége nulla lesz, amennyiben az egyik kocka dominál egy másikat.

A fennmaradó, számunkra még érdekes feliratok az F7, F8, F11 és F12. Vegyük sorra ezeket, figyelembe véve, hogy a megcímkézés során tekintettel kell lennünk a $P(\mathbf{A} > \mathbf{C} > \mathbf{B}) = 0$ feltételre. F7 esetén ez csak úgy lehetséges, ha $\mathbf{A} = \{3\}$, $\mathbf{C} = \{1,5\}$ és $\mathbf{B} = \{2,4,6\}$. Ekkor a példa alapján $P(\mathbf{A} > \mathbf{B}) = r = 33/60$ és $P(\mathbf{A} > \mathbf{C}) = q = 25/60$, valamint $P(\mathbf{A} > \mathbf{B} > \mathbf{C}) = rq = 11/48$, ami ellentmondásra vezet, miután az utóbbi értéknek $23/60$ -nak kellene lennie. Hasonlóan, az F8 feliratnál ez csak úgy lehetséges, ha $\mathbf{A} = \{3\}$, $\mathbf{B} = \{2,5\}$ és $\mathbf{C} = \{1,4,6\}$. Tehát a fentiekkel analóg módon $P(\mathbf{A} > \mathbf{B}) = q = 33/60$ és $P(\mathbf{A} > \mathbf{C}) = r = 25/60$, valamint $P(\mathbf{A} > \mathbf{B} > \mathbf{C}) = qr = 11/48$, ami ismét lehetetlenné teszi a példában szereplő kimeneteli valószínűségek előállítását.

Ugyanez az eljárás alkalmazható az F11-F12 esetekre. Az F11 felirat címkézése $P(\mathbf{A} > \mathbf{C} > \mathbf{B}) = 0$ miatt csak úgy lehetséges, ha $\mathbf{B} = \{4\}$, $\mathbf{A} = \{2,5\}$ és $\mathbf{C} = \{1,3,6\}$. Ekkor a példa alapján $P(\mathbf{A} > \mathbf{B}) = 1 - q = 33/60$ és $P(\mathbf{B} > \mathbf{C}) = r + s = 42/60$, valamint $P(\mathbf{A} > \mathbf{B} > \mathbf{C}) = (1 - q)(r + s) = 77/200$, ami ellentmondásra vezet, miután az utóbbi értéknek $23/60$ -nak kellene lennie. Végül F12 számkiosztás mellett az egyetlen címkézés $\mathbf{B} = \{4\}$, $\mathbf{C} = \{2,6\}$ és $\mathbf{A} = \{1,3,5\}$. Az egyes kimenetel valószínűségéből $P(\mathbf{A} > \mathbf{B}) = 1 - r - s = 33/60$ és $P(\mathbf{B} > \mathbf{C}) = q = 42/60$, illetve $P(\mathbf{A} > \mathbf{B} > \mathbf{C}) = (1 - r - s)(1 - q) = 77/200$, ismét megghiúsítva a példa megvalósítását. Tehát sikerült megmutatnunk, hogy három, összesen legfeljebb hat oldalt tartalmazó kockával nem állítható elő Condorcet példája, ellenben hét oldal megengedésével már igen. \square

6. Összefoglalás és nyitott kérdések

Tanulmányunkban megmutattuk a 2. fejezetben tárgyalt Condorcet-paradoxon intranszitiv dobókockákkal történő megvalósítását. Az 5. fejezetben azt is beláttuk, hogy ez az előállítás minimális, mivel három, összesen legfeljebb hat oldalú dobókocka felhasználása nem elegendő. A 4. fejezetben tárgyalt konstrukció legalább két további kérdést vet fel.

Szintén Condorcet nevéhez kapcsolódik az alábbi klasszikus szavazási paradoxon: a mindössze három szavazóból álló csoportnak három jelölt, A, B, C közül kell győztest hirdetnie. Az egyes választók preferenciasorrendje $A \succ B \succ C$, $B \succ C \succ A$ és $C \succ A \succ B$. Ha a jelölteket páronként hasonlítjuk össze, akkor az $A \succ B$, $B \succ C$, $C \succ A$ állítások mindegyikét a szavazók $2/3$ -a vallja magáénak, azaz az egyszerű többségi szavazással képzett reláció itt sem tranzitív. Felmerül a kérdés, hogy ezt a szavazási szituációt lehet-e reprodukálni dobókockákkal.

3. Állítás. *Az $A \succ B \succ C$ (1 fő), $B \succ C \succ A$ (1 fő), $C \succ A \succ B$ (1 fő) három szavazós és három jelölt szavazási szituáció nem valósítható meg dobókockákkal.*

Bizonyítás. Steinhaus és Trybula tétele szerint nem léteznek olyan $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ független valószínűségi változók, amelyekre $P(\mathbf{A} > \mathbf{B}) = P(\mathbf{B} > \mathbf{C}) = P(\mathbf{C} > \mathbf{A}) > (\sqrt{5} - 1)/2$. Mivel $2/3 > (\sqrt{5} - 1)/2$, az állítást beláttuk. \square

Izgalmas kérdésnek tűnik, hogy a Condorcet-paradoxonban milyen valószínűségekkel helyettesíthetők a $23/60, 0, 2/60$ stb. értékek úgy, hogy továbbra is megvalósítható legyen intranszitiv dobókockákkal. Keressük tehát annak szükséges és elégséges feltételét, hogy

létezzenek olyan $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ független valószínűségi változók, amelyekre

$$\begin{aligned}
 P(\mathbf{A} > \mathbf{B} > \mathbf{C}) &= p_1, \\
 P(\mathbf{A} > \mathbf{C} > \mathbf{B}) &= p_2, \\
 P(\mathbf{B} > \mathbf{A} > \mathbf{C}) &= p_3, \\
 P(\mathbf{B} > \mathbf{C} > \mathbf{A}) &= p_4, \\
 P(\mathbf{C} > \mathbf{A} > \mathbf{B}) &= p_5, \\
 P(\mathbf{C} > \mathbf{B} > \mathbf{A}) &= p_6, \\
 0 \leq p_i &\leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, 6 \\
 \sum_{i=1}^6 p_i &= 1.
 \end{aligned}$$

Ahhoz, hogy egyáltalán paradoxonról beszélhessünk, fel kell tennünk, hogy $p_1 + p_2 + p_5 > 1/2$, $p_1 + p_3 + p_4 > 1/2$ és $p_4 + p_5 + p_6 > 1/2$. Trybula tétele alapján a $(p_1 + p_2 + p_5)(p_1 + p_3 + p_4)(p_4 + p_5 + p_6) \leq 1/4$ egyenlőtlenségnek biztosan teljesülnie kell, de szükséges és elégséges feltételek még nem ismertek.

Tanulmányunk azt sejteti, hogy a szavazáseméleti paradoxonok és az intranszitiv dobókockák közötti összefüggések révén egyes eredmények más megvilágításba helyezhetők, s ezzel elemzésük is új eszközökkel bővíthet.

Hivatkozások

- [1] Bozóki, S. (≥ 2013): Nontransitive dice sets realizing Paley tournaments for solving Schütte's tournament problem, bírálólat alatti kézirat
- [2] Condorcet, M. (1785): Essai sur l'Application de l'Analyse à la Probabilité des Décisions Rendues á la Pluralité des Voix, Paris.
- [3] Gardner, M. (1970): Mathematical Games: The Paradox of the Nontransitive Dice and the Elusive Principle of Indifference, *Scientific American* 223(6), 110-114
- [4] Gehrlein, W.V. (2006): Condorcet's Paradox, *Springer-Verlag*, Berlin, Heidelberg.
- [5] Jackson, M. (2004): Paradoxes with dice and elections, *Towards Excellence in Mathematics (Melbourne)*, *Mathematical Association of Victoria*, 208-218
- [6] Moon, J.W., Moser, L. (1967): Generating oriented graphs by means of team comparisons, *Pacific Journal of Mathematics* 21(3), 531-535
- [7] Pegg, E. Jr. (2005): Tournament Dice, The Mathematical Association of America, Math Games, July 11, 2005.
http://www.maa.org/editorial/mathgames/mathgames_07_11_05.html
 (letöltve 2012. december 10-én)
- [8] Steinhaus, H., Trybula, S. (1959): On a paradox in applied probabilities, *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Serie des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques* 7, 67-69

- [9] Székely, J.G. (2010): Paradoxonok a véletlen matematikájában, 3. kiadás, *Typotex*, Budapest.
- [10] Temesi, J. (2002): A döntéelmélet alapjai, *Aula Kiadó*, Budapest.
- [11] Trybula, S. (1961): On the paradox of three random variables, *Zastosowania Matematyki* 5, 321-332