A Condorcet-paradoxon egy valószínűségi modellje

Bozóki Sándor[1,2], Csató László[2], Temesi József[2]

[1] MTA SZTAKI;

[2] Budapesti Corvinus Egyetem

2013. június 11.

Intranzitív dobókockák

R \ G	2	2	2	5	5	5
1	2	2	2	5	5	5
4	4	4	4	5	5	5
4	4	4	4	5	5	5
4	4	4	4	5	5	5
4	4	4	4	5	5	5
4	4	4	4	5	5	5

15 < 21

G \ B	3	3	3	3	3	6
2	3	3	3	3	3	6
2	3	3	3	3	3	6
2	3	3	3	3	3	6
5	5	5	5	5	5	6
5	5	5	5	5	5	6
5	5	5	5	5	5	6

15 < 21

B \ R	1	4	4	4	4	4
3	3	4	4	4	4	4
3	3	4	4	4	4	4
3	3	4	4	4	4	4
3	3	4	4	4	4	4
3	3	4	4	4	4	4
6	6	6	6	6	6	6

11 < 25

A valószínűségi változókon értelmezett $X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow prob(X > Y) > \frac{1}{2}$ bináris reláció nem feltétlenül tranzitív.

Előzmények

Steinhaus és Trybula (1959)

McGarvey (1959)

Usiskin (1964)

Moon és Moser (1967)

Efron (1970)

...

Moon és Moser (1967) példája

	A csapat	**B** csapat	**C** csapat
1. játékos	2	1	3
2. játékos	6	5	4
3. játékos	7	9	8

Moon és Moser (1967) példája

	A csapat	**B** csapat	**C** csapat
1. játékos	2	1	3
2. játékos	6	5	4
3. játékos	7	9	8

A\B	1	5	9
2	A	B	B
6	A	A	B
7	A	A	B

B\C	3	4	8
1	C	C	C
5	B	B	C
9	B	B	B

C\A	2	6	7
3	C	A	A
4	C	A	A
8	C	C	C

Intranzitivitás a pókerben (Schmidt Miklós, 2013)

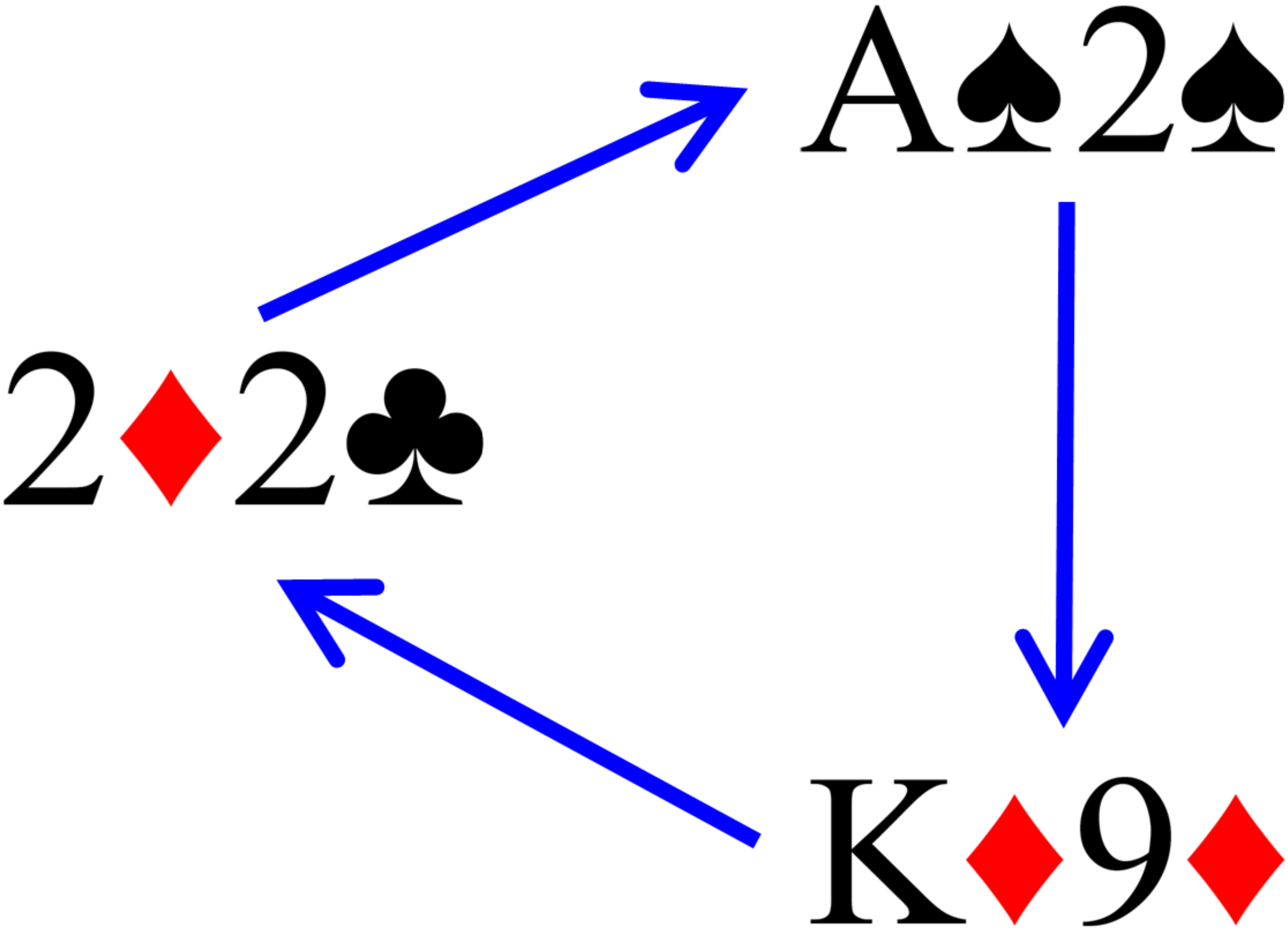
Intranzitivitás a pókerben (Schmidt Miklós, 2013)

A♠2♠

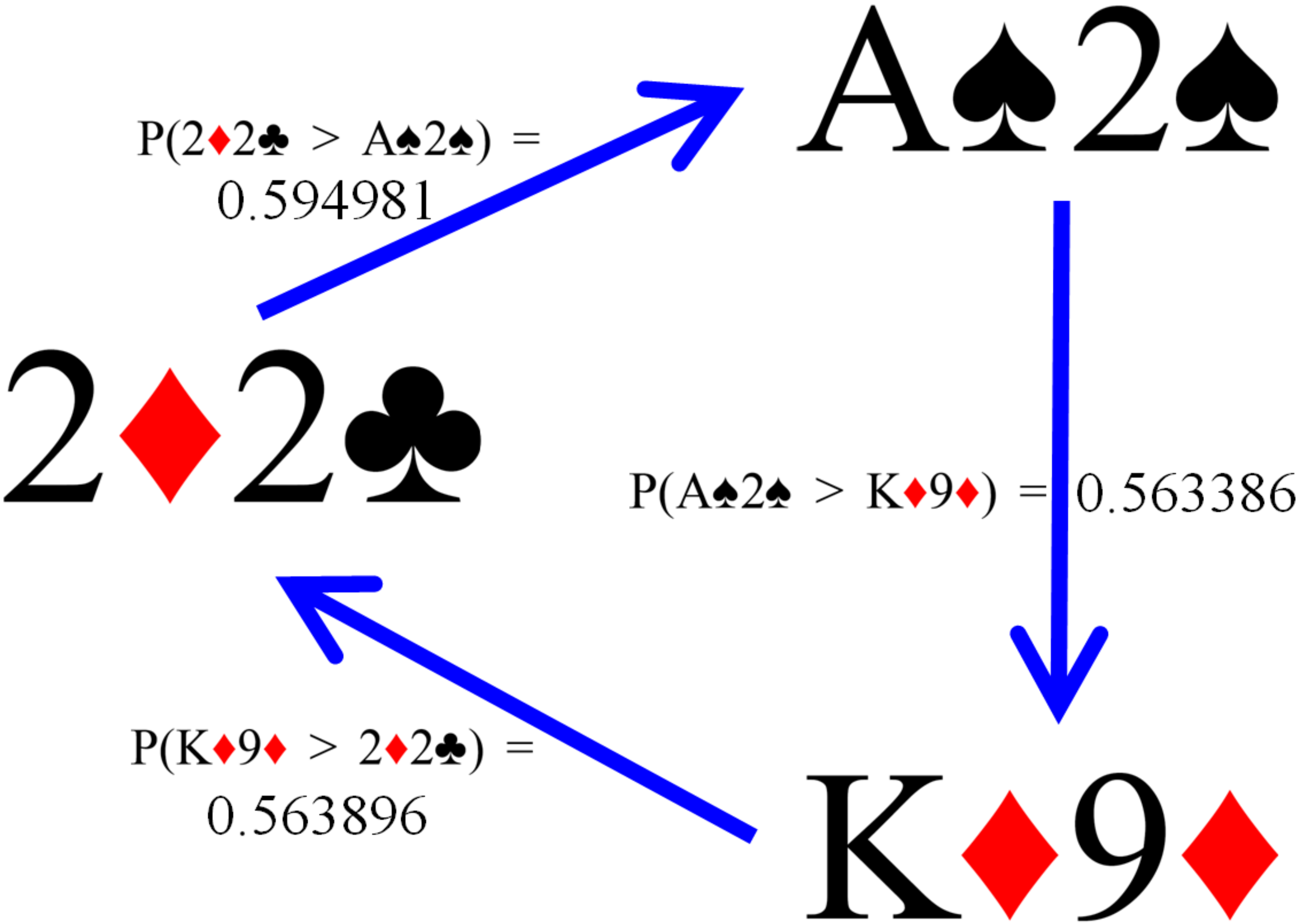
2♦2♣

K♦9♦

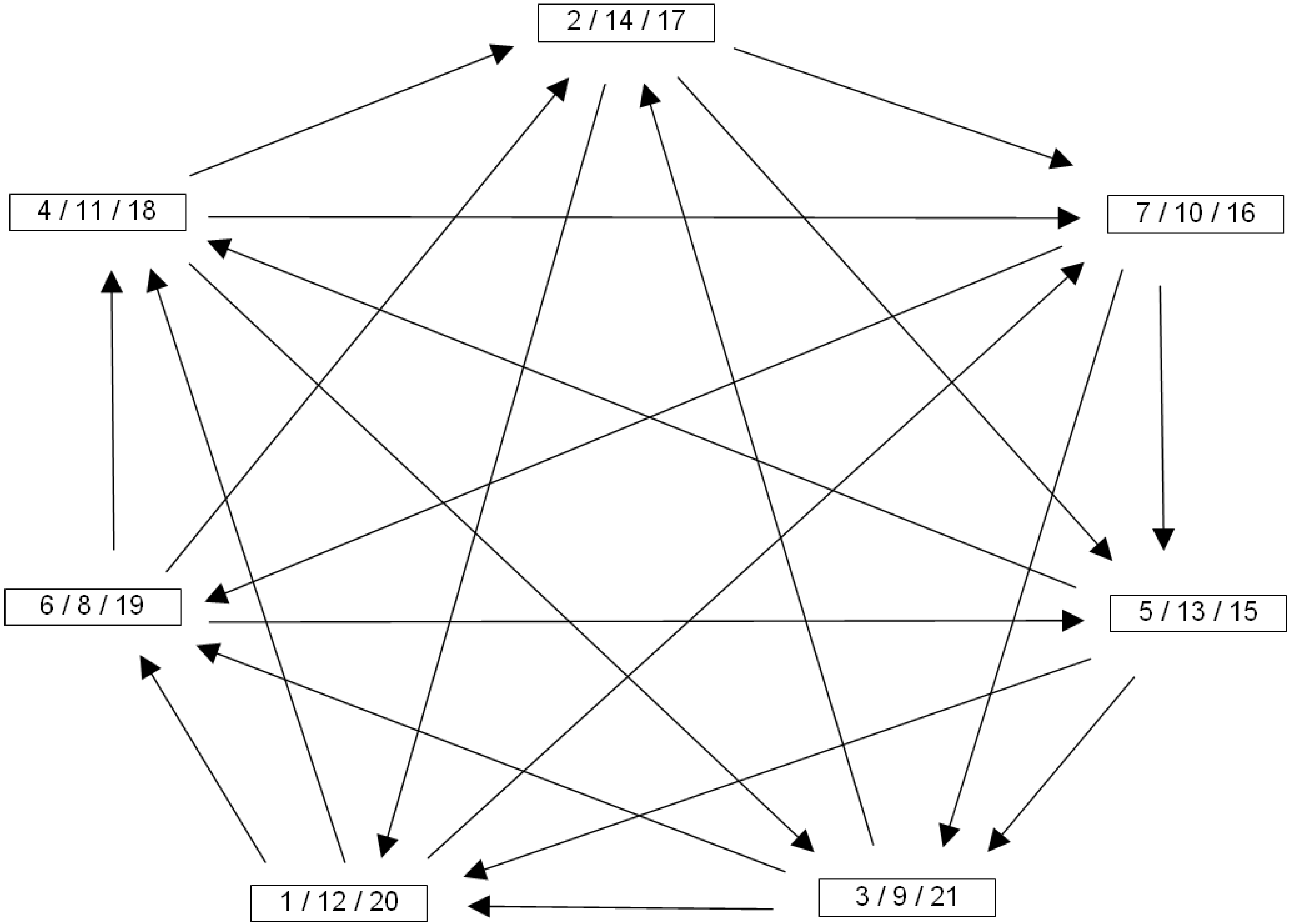
Intranzitivitás a pókerben (Schmidt Miklós, 2013)



Intranzitivitás a pókerben (Schmidt Miklós, 2013)



Oskar van Deventer dobókockái három játékosra



Dobókocka-készlet n játékosra

Olyan dobókocka-készlet is konstruálható, amellyel n játékos játszhat: akárhogy is választ kockát az első $n-1$ játékos, az n. játékos fog találni a megmaradó kockák között olyat, amely az első $n-1$ játékos kockáinak mindegyikét megveri, azaz $\frac{1}{2}$-nél nagyobb valószínűséggel dob vele nagyobbat (B.S., 2013).

Dobókocka-készlet n játékosra

Tetszőleges n csúcsú tournament megvalósítása dobókockákkal és a $p = 8k + 7$ csúcsú Paley-tournament megvalósítása $(p-1)/2$ oldalú dobókockákkal (Bednay Dezső, B.S., 2013)

A Condorcet-paradoxon (1785)

Tekintsünk egy 60 szavazóból álló csoportot, amelynek három jelölt, A, B és C közül kell győztest hirdetnie. Minden szavazó egyértelmű preferenciasorrenddel rendelkezik:

$$A \succ B \succ C : 23 \text{ fő};$$

$$A \succ C \succ B : 0 \text{ fő};$$

$$B \succ A \succ C : 2 \text{ fő};$$

$$B \succ C \succ A : 17 \text{ fő};$$

$$C \succ A \succ B : 10 \text{ fő};$$

$$C \succ B \succ A : 8 \text{ fő}.$$

Ha a jelölteket páronként hasonlítjuk össze, akkor $A \succ B$ 33 fő, $B \succ C$ 42 fő és $C \succ A$ 35 fő véleménye szerint, ami mindhárom esetben több, mint a szavazók fele.

A Condorcet-paradoxon megvalósítása dobókockákkal

Állítás: *A*

$$P(\mathbf{A}=1)=\frac{333}{828},\qquad P(\mathbf{A}=3)=\frac{35}{828},\qquad P(\mathbf{A}=5)=\frac{460}{828};$$

$$P(\mathbf{B}=4)=\frac{99}{100},\qquad P(\mathbf{B}=7)=\frac{1}{100};$$

$$P(\mathbf{C}=2)=\frac{23}{33},\qquad P(\mathbf{C}=6)=\frac{10}{33}$$

dobókockák megvalósítják a Condorcet-paradoxonnak megfelelõ valószínűségeket:

$$P(\mathbf{A}>\mathbf{B}>\mathbf{C})=\frac{23}{60};$$
$$P(\mathbf{A}>\mathbf{C}>\mathbf{B})=0;$$
$$P(\mathbf{B}>\mathbf{A}>\mathbf{C})=\frac{2}{60};$$
$$P(\mathbf{B}>\mathbf{C}>\mathbf{A})=\frac{17}{60};$$
$$P(\mathbf{C}>\mathbf{A}>\mathbf{B})=\frac{10}{60};$$
$$P(\mathbf{C}>\mathbf{B}>\mathbf{A})=\frac{8}{60}.$$

A Condorcet-paradoxon megvalósítása dobókockákkal

Írjuk fel az $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ diszkrét valószínűségi változókat az alábbi paraméteres formában:

$$P(\mathbf{A} = A_1) = p, \qquad P(\mathbf{A} = A_2) = q, \qquad P(\mathbf{A} = A_3) = 1 - p - q;$$
$$P(\mathbf{C} = C_1) = r, \qquad P(\mathbf{C} = C_2) = s, \qquad P(\mathbf{C} = C_3) = 1 - r - s;$$
$$P(\mathbf{B} = B_1) = t, \qquad P(\mathbf{B} = B_2) = u, \qquad P(\mathbf{B} = B_3) = 1 - t - u.$$

A Condorcet-paradoxon megvalósítása dobókockákkal

Intuitív alapon – és néhány próbálkozás után – az

$$P(\mathbf{A}=1)=p, \qquad P(\mathbf{A}=4)=q, \qquad P(\mathbf{A}=7)=1-p-q;$$
$$P(\mathbf{C}=2)=r, \qquad P(\mathbf{C}=5)=s, \qquad P(\mathbf{C}=8)=1-r-s;$$
$$P(\mathbf{B}=3)=t, \qquad P(\mathbf{B}=6)=u, \qquad P(\mathbf{B}=9)=1-t-u$$

dobókockákat vizsgáltuk, mert így mindhárom valószínűségi változó felvehet kis, közepes és nagy értéket is, ezért az egyes sorrendek kellően sokféleképpen fordulhatnak elő.

többváltozós polinomrendszer

$$
\begin{aligned}
(1-p)rt + (1-p-q)(r+s)u &= \frac{23}{60}\\
(1-p-q)st &= 0\\
qr(1-t) + (1-p-q)(r+s)(1-t-u) &= \frac{2}{60}\\
pr + (p+q)s(1-t) + (1-r-s)(1-t-u) &= \frac{17}{60}\\
q(1-r)t + (1-p-q)(1-r-s)(t+u) &= \frac{10}{60}\\
p(1-r)t + (p+q)(1-r-s)u &= \frac{8}{60}
\end{aligned}
$$

megoldás Maple-lel

s szabad változó, $\quad t = 0, \quad u = \frac{99}{100},$

$$p = \frac{176s - 111}{12(33s - 23)}, \qquad q = \frac{35}{36(23 - 33s)}, \qquad r = \frac{23}{33 - s}.$$

Ha $0 \le s \le 111/176 = 0.630\dot{6}\dot{8}\dot{1}$, akkor $0 \le p, q, r \le 1$, tehát végtelen sok olyan kockakészlet adható meg, amely reprodukálja a Condorcet-paradoxont.
Speciálisan, ha $s = 0$, akkor

$$p = \frac{333}{828}, \qquad q = \frac{35}{828}, \qquad r = \frac{23}{33}.$$

Minimalitás

Állítás: *A fenti dobókockakészlet a Condorcet-paradoxont megvalósítók közül összoldalszám tekintetében (az egyik) minimális.*

Korlátok

Steinhaus és Trybula három diszkrét valószínűségi változót $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ adott meg, amelyekre

$$P(\mathbf{A} > \mathbf{B}) = P(\mathbf{B} > \mathbf{C}) = P(\mathbf{C} > \mathbf{A}) = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618.$$

Azt is megmutatták, hogy az aranymetszés arányának reciproka egyben felső korlát a valószínűségekre, ha azok egyenlők:

Tétel (Steinhaus, Trybula, 1959): *Tetszőleges* $p > \left(\sqrt{5}-1\right)/2$ *valószínűség esetén nem léteznek* $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ *független valószínűségi változók, amelyekre* $P(\mathbf{A} > \mathbf{B}) = P(\mathbf{B} > \mathbf{C}) = P(\mathbf{C} > \mathbf{A}) = p.$

Korlátok

Trybula megvizsgálta azt az esetet is, amikor a $P(\mathbf{A} > \mathbf{B})$, $P(\mathbf{B} > \mathbf{C})$, $P(\mathbf{C} > \mathbf{A})$ valószínűségek nem feltétlenül egyenlők, és felső becslést adott ezek összegére, illetve szorzatára.

Tétel (Trybula, 1961): *Tetszőleges* $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ *független valószínűségi változókra*

$$\begin{aligned} P(\mathbf{A} > \mathbf{B}) + P(\mathbf{B} > \mathbf{C}) + P(\mathbf{C} > \mathbf{A}) &\leq 2, \\ P(\mathbf{A} > \mathbf{B})P(\mathbf{B} > \mathbf{C})P(\mathbf{C} > \mathbf{A}) &\leq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Egy nyitott kérdés

Keressük annak szükséges és elégséges feltételét, hogy létezzenek olyan $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ független valószínűségi változók, amelyekre

$$
\begin{aligned}
P(\mathbf{A} > \mathbf{B} > \mathbf{C}) &= p_1,\\
P(\mathbf{A} > \mathbf{C} > \mathbf{B}) &= p_2,\\
P(\mathbf{B} > \mathbf{A} > \mathbf{C}) &= p_3,\\
P(\mathbf{B} > \mathbf{C} > \mathbf{A}) &= p_4,\\
P(\mathbf{C} > \mathbf{A} > \mathbf{B}) &= p_5,\\
P(\mathbf{C} > \mathbf{B} > \mathbf{A}) &= p_6,
\end{aligned}
$$

$$0 \le p_i \le 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, 6$$

$$\sum_{i=1}^{6} p_i = 1.$$

Egy nyitott kérdés

Ahhoz, hogy egyáltalán paradoxonról beszélhessünk, fel kell tennünk, hogy $p_1 + p_2 + p_5 > 1/2$, $p_1 + p_3 + p_4 > 1/2$ és $p_4 + p_5 + p_6 > 1/2$.

Trybula tétele alapján a

$$(p_1 + p_2 + p_5) + (p_1 + p_3 + p_4) + (p_4 + p_5 + p_6) \leq 2;$$
$$(p_1 + p_2 + p_5)(p_1 + p_3 + p_4)(p_4 + p_5 + p_6) \leq 1/4$$

egyenlőtlenségeknek biztosan teljesülniük kell, de szükséges és elégséges feltételek még nem ismertek.

Biztató, hogy a Maple parametrikusan is megoldja a fenti egyenletrendszert, ha ismét (legfeljebb) három oldalú kockákkal dolgozunk. Már *csak* azt kell tisztázni, hogy a megoldások mikor lesznek a $[0, 1]$ intervallumban.

Köszönöm a figyelmet.

bozoki.sandor@sztaki.mta.hu

http://www.sztaki.mta.hu/~bozoki