# Páros összehasonlítás mátrixokból számolt súlyvektorok Pareto-optimalitása

**Bozóki Sándor**[1,2], **Fülöp János**[1,3]

[1] MTA SZTAKI;

[2] Budapesti Corvinus Egyetem

[3] Óbudai Egyetem

XXXI. Magyar Operációkutatási Konferencia
Cegléd, 2015. június 11.

# Páros összehasonlítások

Llull (1280-as és 1290-es évek)

Condorcet (1785), Borda (1781)

Fechner, Weber (1860)

Thorndike (1920), Thurstone (1927)

Saaty – Analytic Hierarchy Process (AHP, 1980)

# Páros összehasonlítás mátrix

Adott $n$ objektum $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ súlyokkal. Definiáljuk a páros összehasonlítás mátrixot:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} & \frac{w_1}{w_3} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & 1 & \frac{w_2}{w_3} & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \frac{w_3}{w_1} & \frac{w_3}{w_2} & 1 & \dots & \frac{w_3}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \frac{w_n}{w_3} & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

ahol minden $i, j, k$ indexre

$$\begin{aligned} w_{ij} &> 0, \\ w_{ij} &= \frac{1}{w_{ji}}, \\ w_{ij} &= w_{ik} w_{kj}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 1 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

ahol $i, j = 1, \dots, n-$re

$$\begin{aligned} a_{ij} &> 0, \\ a_{ij} &= \frac{1}{a_{ji}}. \end{aligned}$$

A feladat:
$\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n_+$ súlyvektor meghatározása.

# Sajátvektor módszer

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = \lambda_{max}\mathbf{w}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

$$(w_i > 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n)$$

# Legkisebb négyzetek módszere

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left( a_{ij} - \frac{w_i}{w_j} \right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

$$w_i > 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

# Logaritmikus legkisebb négyzetek módszere

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[ \log a_{ij} - \log \left( \frac{w_i}{w_j} \right) \right]^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

$$w_i > 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

# Hagyományos és új kutatási irányok, alkalmazások

- Súlyozási módszerek
- Inkonzisztencia
- Nem teljesen kitöltött mátrixok
- Alkalmazások
- **Pareto-optimalitás**

# Pareto-optimalitás

A többcélú optimalizálási feladatunk:

$$\min_{x_i > 0 \ \forall i} \left( \left| a_{ij} - \frac{x_i}{x_j} \right| \right)_{i \neq j}$$

# Pareto-optimalitás

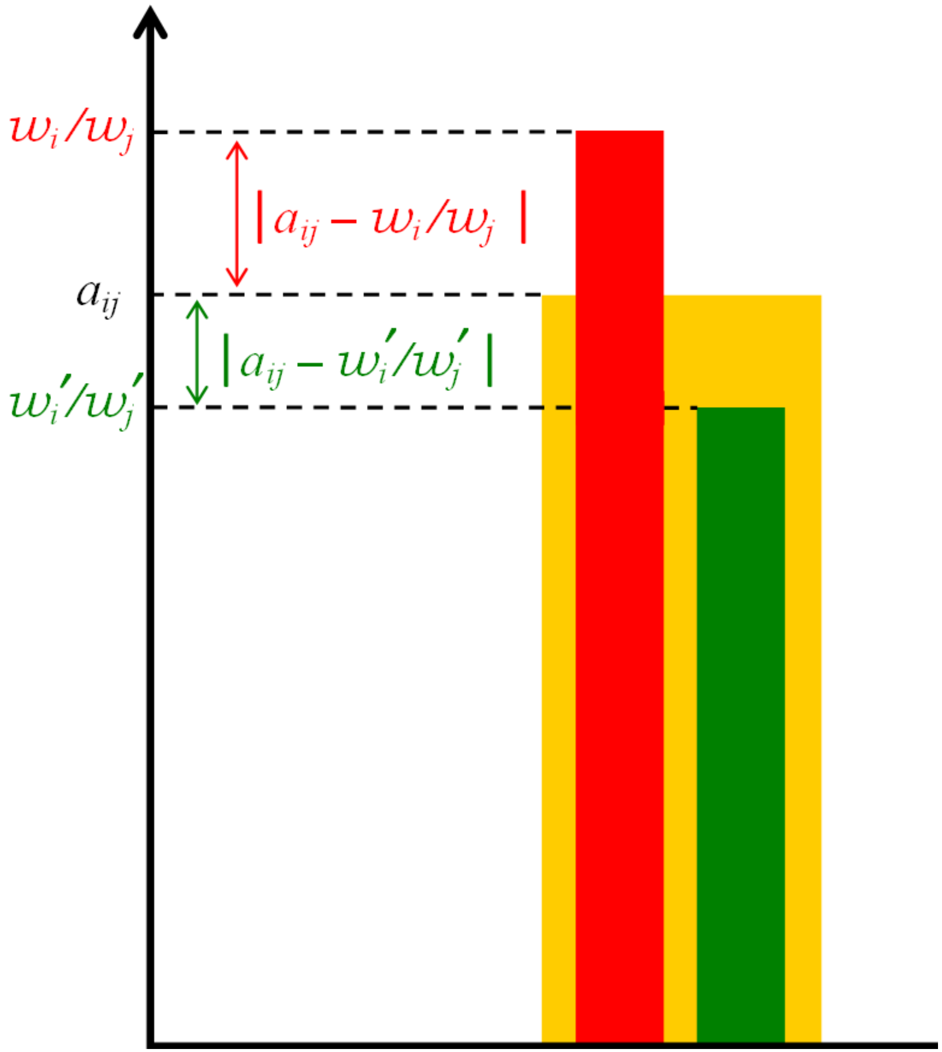
Legyen $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$ egy $n \times n$-es páros összehasonlítás mátrix és $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^\top$ egy pozitív súlyvektor.

**Definíció:** a $\mathbf{w}$ súlyvektor *Pareto-optimális,* ha **nem** létezik olyan $\mathbf{w}' = (w'_1, w'_2, \ldots, w'_n)^\top$ súlyvektor, hogy

$$\left| a_{ij} - \frac{w'_i}{w'_j} \right| \leq \left| a_{ij} - \frac{w_i}{w_j} \right| \qquad \text{minden } 1 \leq i, j \leq n, \text{ esetén, és}$$

$$\left| a_{k\ell} - \frac{w'_k}{w'_\ell} \right| < \left| a_{k\ell} - \frac{w_k}{w_\ell} \right| \qquad \text{valamely } 1 \leq k, \ell \leq n \text{ esetén.}$$

Egy Pareto-optimális súlyvektort tehát nem lehet dominálni, azaz megjavítani úgy, hogy legalább egy pozícióban jobban közelítse a döntéshozó által megadott értéket, miközben egyetlen más pozícióban sem keletkezik rosszabb közelítés.



# Lokális Pareto-optimalitás

**Definíció:** a $\mathbf{w}$ súlyvektor *lokálisan Pareto-optimális,* ha van olyan $V(\mathbf{w})$ környezet, amelyben egyetlen $\mathbf{w}' = (w_1', w_2', \ldots, w_n')^\top$ súlyvektorra **sem** teljesül, hogy

$$\left| a_{ij} - \frac{w_i'}{w_j'} \right| \le \left| a_{ij} - \frac{w_i}{w_j} \right| \qquad \text{minden } 1 \le i, j \le n, \text{ esetén, és}$$

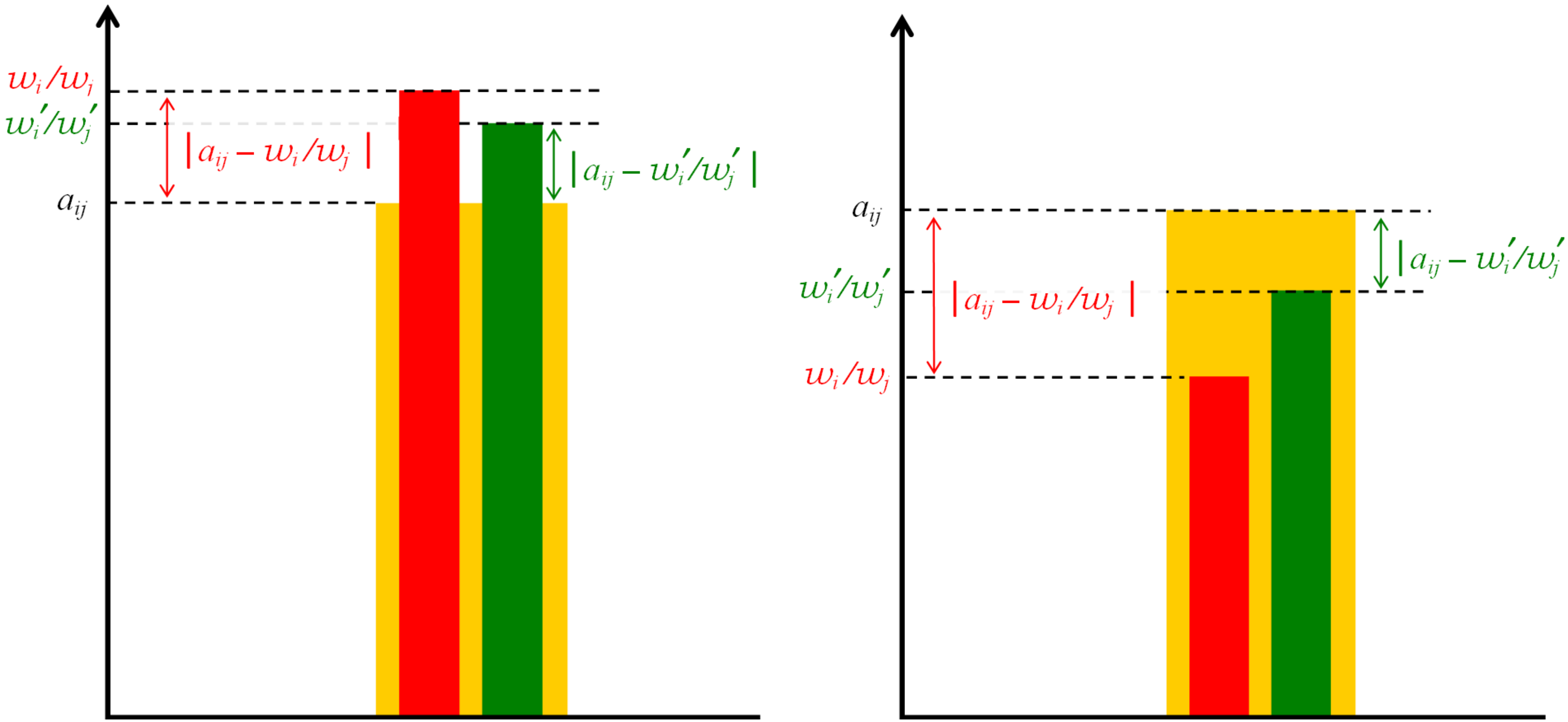
$$\left| a_{k\ell} - \frac{w_k'}{w_\ell'} \right| < \left| a_{k\ell} - \frac{w_k}{w_\ell} \right| \qquad \text{valamely } 1 \le k, \ell \le n \text{ esetén.}$$

# Belső Pareto-optimalitás

**Definíció:** a $\mathbf{w}$ súlyvektor *belső Pareto-optimális,* ha **nem** létezik olyan $\mathbf{w}' = (w_1', w_2', \ldots, w_n')^\top$ súlyvektor, hogy

$$\left.\begin{array}{lll} a_{ij} \leq \frac{w_i}{w_j} & \Longrightarrow & a_{ij} \leq \frac{w_i'}{w_j'} \leq \frac{w_i}{w_j} \\ a_{ij} \geq \frac{w_i}{w_j} & \Longrightarrow & a_{ij} \geq \frac{w_i'}{w_j'} \geq \frac{w_i}{w_j} \end{array}\right\} \text{ minden } 1 \leq i, j \leq n, \text{ esetén, és}$$

$$\left.\begin{array}{lll} a_{k\ell} \leq \frac{w_k}{w_\ell} & \Longrightarrow & \frac{w_k'}{w_\ell'} < \frac{w_k}{w_\ell} \\ a_{k\ell} \geq \frac{w_k}{w_\ell} & \Longrightarrow & \frac{w_k'}{w_\ell'} > \frac{w_k}{w_\ell} \end{array}\right\} \text{ valamely } 1 \leq k, \ell \leq n \text{ esetén.}$$



$w_i/w_j$
$w_i'/w_j'$
$|a_{ij} - w_i/w_j|$
$|a_{ij} - w_i'/w_j'|$
$a_{ij}$
$a_{ij}$
$|a_{ij} - w_i'/w_j'|$
$w_i'/w_j'$
$|a_{ij} - w_i/w_j|$
$w_i/w_j$

# Pareto-optimalitás

A definíciókból következik, hogy

$$\text{Pareto-optimalitás} \Longrightarrow \text{lokális Pareto-optimalitás},$$
$$\text{Pareto-optimalitás} \Longrightarrow \text{belső Pareto-optimalitás},$$

## Pareto-optimalitás

A definíciókból következik, hogy

$$\text{Pareto-optimalitás} \Longrightarrow \text{lokális Pareto-optimalitás},$$
$$\text{Pareto-optimalitás} \Longrightarrow \text{belső Pareto-optimalitás},$$

valójában azonban:

**Tétel:** A Pareto-optimalitás, a lokális Pareto-optimalitás és a belső Pareto-optimalitás ekvivalensek.

# Pareto-optimalitás

Blanquero, Carrizosa és Conde (2006) példája:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 2 \\ 1/2 & 1 & 4 & 3 \\ 1/6 & 1/4 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}^{EM} = \begin{pmatrix} 6.01438057 \\ 4.26049429 \\ 1 \\ 2.0712416 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}^{*} = \begin{pmatrix} 6.01438057 \\ 4.26049429 \\ 1.003 \\ 2.0712416 \end{pmatrix}.$$

| $i$ | $a_{i3}$ | $x_{i3}^{EM}$ | $x_{i3}^{*}$ | $\lvert a_{i3} - x_{i3}^{EM}\rvert$ | $\lvert a_{i3} - x_{i3}^{*}\rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 6.01438057 | 5.99639139 | 0.01438057 | 0.00360859 |
| 2 | 4 | 4.26049429 | 4.24775103 | 0.26049429 | 0.24775103 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 4 | 2 | 2.07124160 | 2.06504646 | 0.07124160 | 0.06504646 |

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1/9 & 9 & 1/9 & 1/8 \\ 1/4 & 1 & 1/8 & 1/4 & 1/7 & 1/5 \\ 9 & 8 & 1 & 8 & 4 & 1/2 \\ 1/9 & 4 & 1/8 & 1 & 7 & 1/3 \\ 9 & 7 & 1/4 & 1/7 & 1 & 1/5 \\ 8 & 5 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}^{EM} = \begin{pmatrix} 0.1281 \\ 0.0180 \\ 0.3028 \\ 0.1237 \\ 0.1440 \\ 0.2835 \end{pmatrix}, \mathbf{w}^{*} = \begin{pmatrix} 0.1281 \\ \mathbf{0.0206} \\ \mathbf{0.3471} \\ 0.1237 \\ 0.1440 \\ \mathbf{0.3249} \end{pmatrix}.$$

A közelítések:

$$\begin{array}{cc} \mathbf{X}^{EM} & \mathbf{X}^{*} \\ \begin{pmatrix} 1 & 7.13 & 0.42 & 1.03 & 0.88 & 0.45 \\ 0.14 & 1 & 0.05 & 0.14 & 0.12 & 0.06 \\ 2.36 & 16.86 & 1 & 2.44 & 2.10 & 1.06 \\ 0.96 & 6.88 & 0.40 & 1 & 0.85 & 0.43 \\ 1.12 & 8.02 & 0.47 & 1.16 & 1 & 0.50 \\ 2.21 & 15.78 & 0.93 & 2.29 & 1.96 & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{6.22} & \mathbf{0.36} & 1.03 & 0.88 & \mathbf{0.39} \\ \mathbf{0.16} & 1 & 0.05 & \mathbf{0.16} & \mathbf{0.14} & 0.06 \\ \mathbf{2.71} & 16.86 & 1 & \mathbf{2.80} & \mathbf{2.40} & 1.06 \\ 0.96 & \mathbf{6.01} & \mathbf{0.35} & 1 & 0.85 & \mathbf{0.38} \\ 1.12 & \mathbf{7.00} & \mathbf{0.41} & 1.16 & 1 & \mathbf{0.44} \\ \mathbf{2.53} & 15.78 & 0.93 & \mathbf{2.62} & \mathbf{2.25} & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$
\mathbf{A}(p,q) = \begin{pmatrix}
1 & p & p & p & \dots & p & p \\
1/p & 1 & q & 1 & \dots & 1 & 1/q \\
1/p & 1/q & 1 & q & \dots & 1 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\
1/p & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & q \\
1/p & q & 1 & 1 & \dots & 1/q & 1
\end{pmatrix},
$$

**Állítás:** Legyen $p, q > 0, q \neq 1$ tetszőleges. Ekkor $\mathbf{w}^{EM}$ nem Pareto-optimális.

Ráadásul a fenti mátrix $CR$-inkonzisztenciája tetszőlegesen alacsony lehet, ha $q$ elég közel van 1-hez.

A sajátvektor mint optimalizálási feladatok megoldása:

- Fichtner (1984) metrikája
- Perron és Frobenius $\min\max$ és $\max\min$ feladatai

# Fichtner (1984) metrikája

$$\delta(\mathbf{A},\mathbf{B}) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(w_i^{EM(\mathbf{A})} - w_i^{EM(\mathbf{B})}\right)^2} + \frac{|\lambda_{\max}(\mathbf{A}) - \lambda_{\max}(\mathbf{B})|}{2(n-1)} +$$

$$+\chi(\mathbf{A},\mathbf{B})\,\frac{|\lambda_{\max}(\mathbf{A}) + \lambda_{\max}(\mathbf{B}) - 2n|}{2(n-1)},$$

ahol

$$\chi(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \begin{cases} 0 & \text{ha } \mathbf{A} = \mathbf{B}, \\ 1 & \text{ha } \mathbf{A} \neq \mathbf{B}. \end{cases}$$

**Tétel** (Perron, Frobenius). Jelölje $\lambda_{\max}$ az $\mathbf{A}$ $n \times n$-es páros összehasonlítás mátrix legnagyobb sajátértékét. Ekkor

$$\max_{\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n_+} \min_{1\leq i\leq n} \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j}{w_i} \leq \lambda_{\max} \leq \min_{1\leq i\leq n} \max_{\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n_+} \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j}{w_i}$$

ahol $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$. Továbbá mindkét egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül egyenlőséggel, ha $\mathbf{w} = \kappa \mathbf{w}^{EM}$, ahol $\kappa$ tetszőleges pozitív szám.

# Pareto-optimalitás

$$\min_{x_i > 0\ \forall i} \left( \left| a_{ij} - \frac{x_i}{x_j} \right| \right)_{i \neq j}$$

Jelölje $\varepsilon_{ij} := \left| \frac{w_i}{w_j} - a_{ij} \right|$

**Állítás:** $\mathbf{w}$ akkor és csak akkor Pareto-optimális, ha bármely $k, \ell = 1, 2, \ldots, n,\ k \neq \ell$ indexpárra $\mathbf{w}$ optimális megoldása az alábbi törtprogramozási feladatnak:

$$\inf \left| \frac{x_k}{x_\ell} - a_{k\ell} \right|$$

$$\left| \frac{x_i}{x_j} - a_{ij} \right| \leq \varepsilon_{ij} \qquad \text{minden } (i, j) \neq (k, \ell)\text{-re}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n > 0.$$

$$\left|\frac{x_i}{x_j} - a_{ij}\right| \leq \varepsilon_{ij} \Longleftrightarrow |x_i - a_{ij}x_j| \leq \varepsilon_{ij}x_j \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_i - a_{ij}x_j + t_{ij} & \leq & \varepsilon_{ij}x_j \\ a_{ij}x_j - x_i + t_{ij} & \leq & \varepsilon_{ij}x_j \\ t_{ij} & \geq & 0 \end{array} \right.$$

$$\varepsilon_{ij} := \left| \frac{w_i}{w_j} - a_{ij} \right|$$

Legyenek a $\beta_{ij} > 0$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ szorzók tetszőlegesek.

$$\begin{aligned}
\max \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} t_{ij} & \\
x_i - (a_{ij} + \varepsilon_{ij}) x_j + t_{ij} \le 0, &\qquad i, j = 1, 2, \ldots, n \\
-x_i + (a_{ij} - \varepsilon_{ij}) x_j + t_{ij} \le 0, &\qquad i, j = 1, 2, \ldots, n \\
x_1 = 1, & \\
x_i \ge 0, &\qquad i = 2, 3, \ldots, n \\
t_{ij} \ge 0, &\qquad i, j = 1, 2, \ldots, n \\
t_{ii} = 0, &\qquad i = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned} \qquad \text{(LP)}$$

Változók: $x_i, \ i = 1, 2, \ldots, n,$ és $t_{ij}, \ i, j = 1, 2, \ldots, n$.

$$\varepsilon_{ij} := \left| \frac{w_i}{w_j} - a_{ij} \right|$$

$$\begin{aligned}
\max \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} t_{ij} & \\
x_i - (a_{ij} + \varepsilon_{ij}) x_j + t_{ij} \leq 0, & \qquad i,j = 1,2,\dots,n \\
-x_i + (a_{ij} - \varepsilon_{ij}) x_j + t_{ij} \leq 0, & \qquad i,j = 1,2,\dots,n \\
x_1 = 1, & \\
x_i \geq 0, & \qquad i = 2,3,\dots,n \\
t_{ij} \geq 0, & \qquad i,j = 1,2,\dots,n \\
t_{ii} = 0, & \qquad i = 1,2,\dots,n
\end{aligned} \tag{LP}$$

**Tétel:** A fenti LP optimumértéke nemnegatív és véges. Továbbá $\mathbf{w}$ akkor és csak akkor Pareto-optimális, ha a fenti LP optimumértéke 0.

Az LP feladat megoldása, azaz $\mathbf{w}$ egy javítása még nem feltétlenül Pareto-optimális.

# A logaritmizált változat

$$\min_{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^n} \left(|z_i - z_j - \log a_{ij}|\right)_{i\neq j}$$

Jelölje $q_i := \log w_i \, (i = 1, 2, \ldots, n)$,
$\mu_{ij} := |q_i - q_j - \log a_{ij}| \ (i, j = 1, 2, \ldots, n)$ és legyenek a
$\vartheta_{ij} > 0, \ 1 \leq i < j \leq n$ szorzók tetszőlegesek.

$$\max \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \vartheta_{ij} s_{ij}$$

$$\begin{aligned}
z_i - z_j - \log a_{ij} - \mu_{ij} + s_{ij} &\leq 0, && 1 \leq i < j \leq n \\
z_j - z_i + \log a_{ij} - \mu_{ij} + s_{ij} &\leq 0, && 1 \leq i < j \leq n \qquad \text{(logLP)} \\
z_1 &= 0 \\
s_{ij} &\geq 0, && 1 \leq i < j \leq n
\end{aligned}$$

Változók: $z_i, \ i = 1, 2, \ldots, n, \qquad s_{ij}, \ 1 \leq i < j \leq n$.

**Tétel:** Az alábbi állítások ekvivalensek:

(1) $\mathbf{w}$ Pareto-optimális a

$$\min_{x_i > 0 \ \forall i} \left( \left| a_{ij} - \frac{x_i}{x_j} \right| \right)_{i \neq j}$$

többcélú optimalizálási feladatban;

(2) LP optimumértéke 0;

(3) $\mathbf{q} = \log \mathbf{w}$ Pareto-optimális a

$$\min_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n} \left( |z_i - z_j - \log a_{ij}| \right)_{i \neq j}$$

többcélú optimalizálási feladatban;

(4) logLP optimumértéke 0.

Tegyük fel, hogy $\mathbf{w}$ nem Pareto-optimális, és oldjuk meg a logLP feladatot, az optimális megoldást jelölje $\mathbf{z}^*$.

Meglepő módon $\mathbf{w}^* := \exp \mathbf{z}^*$, nem feltétlenül dominálja $\mathbf{w}$-t.

A következő előadásban a Pareto-optimalitás egy további karakterizációja jelenik meg.

# A sajátvektor Pareto-optimalitása

A sajátvektor biztosan nem Pareto-optimális:

- a korábban említett, tetszőlegesen alacsony CR-inkonziszténciájú mátrixokra:

$$
\begin{pmatrix}
1 & p & p & p & \dots & p & p \\
1/p & 1 & q & 1 & \dots & 1 & 1/q \\
1/p & 1/q & 1 & q & \dots & 1 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\
1/p & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & q \\
1/p & q & 1 & 1 & \dots & 1/q & 1
\end{pmatrix}
$$

# A sajátvektor Pareto-optimalitása

A sajátvektor biztosan Pareto-optimális, ha a páros összehasonlítás mátrix

- konzisztens;
- $3 \times 3$-as, hiszen ekkor sajátvektor megegyezik a logaritmikus legkisebb négyzetek módszerével kapott mértani középpel;
- egy vagy két elem (és reciprokaik) megváltoztatásával konzisztenssé tehető – ez is a következő előadás témája

# A sajátvektor Pareto-optimalitása

**Nyitott kérdés:**

a sajátvektor Pareto-optimalitásának szükséges és elégséges feltétele.

# Hivatkozások 1/4


Saaty, T.L. (1977): A scaling method for priorities in hierarchical structures. *Journal of Mathematical Psychology*, **15**(3):234–281.

Saaty, T.L. (1980): The Analytic Hierarchy Process, McGraw-Hill, New York.

Fichtner, J. (1984): Some thoughts about the Mathematics of the Analytic Hierarchy Process, *Report 8403,* Universität der Bundeswehr München, Fakultät für Informatik, Institut für Angewandte Systemforschung und Operations Research, Werner-Heisenberg-Weg 39, D-8014 Neubiberg, F.R.G.

# Hivatkozások 2/4


Blanquero, R., Carrizosa, E., Conde, E. (2006): Inferring efficient weights from pairwise comparison matrices, *Mathematical Methods of Operations Research* **64**(2):271–284.

Conde, E., Pérez, M.d.l.P.R. (2010): A linear optimization problem to derive relative weights using an interval judgement matrix, *European Journal of Operational Research*, **201**(2):537–544.

## Hivatkozások 3/4


Bozóki, S. (2014): Inefficient weights from pairwise comparison matrices with arbitrarily small inconsistency, *Optimization*, **63**(12):1893–1901.

Ábele-Nagy, K., Bozóki, S. (2015): Efficiency analysis of simple perturbed pairwise comparison matrices, *bírálat alatt*.

Ábele-Nagy, K., Bozóki, S., Rebák, Ö. (2015): Efficiency analysis of double perturbed pairwise comparison matrices, *benyújtás előtt*.

# Hivatkozások 4/4

Bozóki, S., Fülöp, J. (2015): Efficient weight vectors from pairwise comparison matrices, *benyújtás előtt*.

Köszönöm a figyelmet.

bozoki.sandor@sztaki.mta.hu

http://www.sztaki.mta.hu/$\sim$bozoki