Intuicionista matematikafilozófia

Csáji Balázs Csanád
témavezető: Csaba Ferenc

szigorlati dolgozat, filozófia szak
ELTE-BTK, 2003/2004 tavaszi félév

1. Bevezetés

Ebben a dolgozatban egy matematikai *anti-realista* álláspontot vizsgálok meg, nevezetesen az intuicionizmust. A dolgozat egyik fő célja annak bemutatása, hogy milyen érvek szolgálnak az intuicionista logikai funktorok kizárólagos elfogadása mellett, és annak vizsgálata, hogy ez milyen következményekkel jár a matematikára nézve. Az elsősorban *Brouwer* és *Heyting* nevéhez köthető intuicionizmus – mint ahogyan azt később látni fogjuk – nem teljsen egyezik meg *Bishop* konstruktivizmusával vagy *Markov* konstruktív rekurzív matematikájával, de a legtöbb érv amely a dolgozatban szerepel és az intuicionizmus elfogadása mellett szól, alkalmazható más konstruktivista álláspontok védelmében is. Ebben a bevezető fejezetben röviden ismertetem, hogy mit is jelent állítások egy bizonyos osztályával kapcsolatban *realistának* vagy anti-realistának lenni. A realizmus fogalmának meghatározásánál *Michael Dummett* „Realizmus" című cikkében [3] található fogalmi keretet fogom használni.

Kijelentések egy osztályával kapcsolatban – amely osztályt az *adott osztály*nak nevezzük – *realistának* hívjuk az olyan *szemantikai* álláspontokat, amelyek szerint az adott osztály kapcsolatban van egy olyan valósággal, amely a tudásunktól függetlenül létezik, oly módon, hogy ez a valóság igazzá vagy hamissá teszi állításainkat az osztályból, függetlenül attól, hogy mi ismerjük-e vagy egyáltalán képesek vagyunk megismerni ezeket az igazságértékeket [3]. Azok az álláspontok, amelyek a tudásunktól független igazságértékek létezését tagadják az adott osztály állításaitól: *anti-realisták.* Az „adott osztály"-ra való hivatkozás egy nem elhagyható eleme a realizmus / anti-realizmus definíciójának, ugyanis könnyen elképzelhető, hogy valaki realista állítások egy osztályára vonatkozóan (például a matematikai állításokkal kapcsolatban), de anti-realista egy másik osztállyal kapcsolatban (például a mentális állapotokra vonatkozóan).

Dummett szerint [3] a realizmus maga után vonja a kétértékűség (bivaliancia) elvének elfogadását az adott osztályra vonatkozóan, nevezetesen, hogy minden az adott osztályba tartozó állítás határozottan igaz vagy hamis. Ebből következik, hogy a kizárt harmadik (tertium non datur) elvének tagadása egy osztállyal kapcsolatban együtt jár az anti-realista állásponttal.

A matematikai állításokkal kapcsolatos realizmust (amikor az adott osztály a matematikai állítások osztálya) szokás *matematikai platonizmusnak* vagy *matematikai idealizmusnak* is nevezni. Ebben a dolgozatban – mivel csak matematikai állításokról lesz szó – a „matematikai" jelzőt gyakran elhagyom és egyszerűen csak platonizmusnak, realizmusnak vagy idealizmusnak hívom. Az anti-realisták szerint nem létezik egy a tudásunktól függetleg valóság, amely igazzá vagy hamissá tenné a matematikai állításokat és a matematikai objektumok csak az elménk konstrukciói. Ebből kifolyólag az intuicionisták tagadják a kizárt harmadik elvének érvényességét és új alapokra helyezték a matematikát a nem-klasszikus (konstruktív) logikai konstansok bevezetésével. Természetesen, nem az intuicionista logikai funktorok elfogadása jelenti a különbséget a realista és anti-realista álláspontok között. Egy platonista is értékelheti, ha egy bizonyítás konstruktív – mivel az több információval szolgál a számára – és bevezethet jelöléseket a konstruktív „létezik" vagy a konstruktív „vagy" jelölésére. A fő különbség a nem-klasszikus konstansok használatának kizárólagos elfogadásában áll, annak elismerésében, hogy *csak* ezek az elfogadható eszközök a matematikában.

Egy gyakran idézett példa nem-konstruktív matematikai bizonyításokra a következő tételre adható: bizonyítsuk be, hogy $\exists\, a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : a^b \in \mathbb{Q}$. A Dummett által adott ügyes nem-konstruktív bizonyítás [2] így szól: vagy $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ racionális, és ekkor jó választás az $a = b = \sqrt{2}$ vagy $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ irracionális és ekkor $a = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ és $b = \sqrt{2}$ megfelelő választás. Vegyük észre, hogy ez a bizonyítás nem adja meg számunkra, hogy melyik a két keresett irracionális szám. Megjegyzem, hogy adható konstruktív bizonyítás is a tételre, például a *Gelfond–Schneider* tétel felhasználásával [15], amely szerint ha $a \notin \{0, 1\}$, és a algebrai, b irracionális algebrai, akkor a^b transzcendentális.

2. Történeti áttekintés

Mielőtt elkezdeném megvizsgálni, hogy milyen érvek hozhatók fel a klasszikus logikai konstansok elvetése mellett és ez milyen következményekkel jár a matematikára nézve, vázlatosan (a teljesség igénye nélkül) ismertetem a konstruktivizmus történeti kialakulását.

Talán érdemes *Immanuel Kant* (1724–1804) jellegzetes matematika felfogásával kezdeni, mivel ez erős hatással volt a későbbi intuicionista matematika kialakulására. Kant „A tiszta ész kritikája" -ban kifejti [6], hogy a matematika állításai *szintetikus*[1] *a priori* természetűek (ellentétben mondjuk *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646–1716) felfogásával, aki abszolút módon érvényes *észigazságoknak* tartotta a matematika állításait). Kant az aritmetikára vonatkozóan ezt a $7 + 5 = 12$ példáján mutatja be. Szerinte nem az ellentmondás törvénye alapján következik, hogy 7 és 5 összege 12 mivel a 7 és az 5 összegének fogalma semmi többet nem tartalmaz csak a két szám egyetlen számban való egyesítését de nem foglalja magában azt, hogy melyik számot gondoljuk a kettő összefoglalásaként. Tehát minden aritmetikai tétel szintetikus. Hasonlóan a geometria és a matematika többi ága is szintetikus Kant szerint. A matematika bázisa szerinte a tér és az idő tiszta belső (az érzéki tapasztalást megelőző) szemlélete, intuíci-

[1] Kant szintetikusnak hívja az olyan alany-állítmány szerkezetű állításokat, amelyekben az állítmány ismeretbővítő jellegű, tehát amelyekben az állítmány az alany fogalmában még rejtve sincs benne [6].

ója. A matematika szintetikus jellege abban nyilvánul meg, hogy a matematikai tételek gondolati konstrukciók eredményei [13].

2.1. Korai konstruktivisták

A matematikai platonizmusnak sok ellenfele akadt már a XIX. század folyamán. Talán a legismertebb közülük *Leopold Kronecker* (1823–1891) akit a konstruktivizmus vagy még inkább a finitizmus előfutárának is tekinthetünk [14]. Sokat elárul intuicionizmushoz közel álló nézeteiről gyakran idézett mondása: *„Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk."*[2] (Heinrich Weber gyászbeszédéből). Kronecker körvonalazott egy „aritmetizálási" tervet, mely az algebra és az analízis számokkal való megalapozására vonatkozott. Ezt a programját később *Jules Molk* folytatta.

Fontos állomást jelentettek a konstruktív matematika kialakulásában a francia pre-intuicionisták, akik a *Zermelo-Fraenkel*-féle halmazelméletet megalapozó axiómarendszer *kiválasztási axiómájának* kritikája kapcsán fejtettek ki többé-kevésbé konstruktivista nézeteket. A legfontosabb alakjai ezen irányvonalnak [14]: *Baire*, *Borel*, *Lebesgue*, *Lusin* és *Poincaré*.

Julius Henri Poincaré (1854–1912) támadta a *Cantor* féle halmazelméletet (például az aktuális végtelen fogalmát) és a „logicizmust". Logikai szkepticizmusát jellemzi mondása, miszerint: *„Egy szillogizmus nem tud semmilyen esszenciálisan újat tanítani nekünk."* (1902). Amellett érvelt, hogy a matematikában többre van szükségünk mint logikára: intuíciókra. Szigorúan véve nem volt intuicionista, de kritikája a logikával kapcsolatban (például a teljes indukcióval kapcsolatban) a konstruktivizmus egyik elődjévé teszi.

Emile Borel (1871–1956) nézetei közel álltak Kroneckeréhez, például úgy gondolta, hogy csak az effektíven (pl.: véges sok szóval) definiált objektumok léteznek a tudományban és a konzisztencia nem elégséges a létezéshez. Megjegyzem, hogy ezen elmélet „liberálisabb" mint az intuicionista matematika, mivel még megenged olyan függvényeket (mint amilyen a *Dirichlet* függvény[3]) amelyeket az intuicionista matematika – amint azt látni fogjuk – nem tekint függvénynek.

2.2. Brouwer és Heyting intuicionizmusa

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966) holland matematikus nevéhez fűződik az intuicionizmus első megfogalmazása, aki először 1907-ben Amszterdamban a matematika megalapozásáról szóló doktori disszertációjában fejtette ki anti-realista nézeteit. Brouwer szerint a matematika az elme belső szabad alkotása és független mindenféle nyelvtől vagy platonikus valóságtól. Szerinte a matematika nem függ a logikától és a logika a matematika része, valamint a matematikát nem lehet axiomatikus módon megalapozni. (Ezen nézetei például teljesen ellentétben állnak a logikai-pozitivisták gondolkodásával, pl.: *Rudolf*

[2] Az egész számokat Isten teremtette, minden más emberi alkotás.
[3] $d : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$, $d(x) = 0$ ha $x \in \mathbb{Q}$ és $d(x) = 1$ ha $x \notin \mathbb{Q}$

Carnap (1891-1970) több helyen kifejti, hogy a matematika analitikus és a logika része [1].) Brouwer elutasította a Hilbert féle formalizmust és a Cantor féle halmazelméletet. A logika számára csak egy megbízhatatlan eszköz a kommunikációra. Logikán ő *Arisztotelész* szillogizmusait, néha *Peano* és *Russell* elméleteit értette. A matematikai gondolkodás – Brouwer szerint – matematikai struktúrák megalkotásából áll, és a szillogizmusokhoz hasonló logikai struktúrák megjelenését csak a szabály alkalmazása közben végzett matematikai konstrukció igazolja. A logikát alkalmazott matematikának tekintette és empirikus tudománynak [14]. Szerinte nem létezik meghatározott matematikai igazság a gondolkodáson kívül, és egy állítás csak akkor lesz igaz ha a szubjektum megtapasztalta az igazságát (amit a megfelelő mentális konstrukció véghezvitelével tud megtenni). Hasonlóképpen, egy állítás csak akkor lesz hamis, ha a szubjektum megtapasztalta a hamisságát (mivel felismerte, hogy egy meghatározott logikai konstrukció nem lehetséges). Tehát Brouwer szerint nincsenek nem megtapasztalt (tudásunktól független) igazságok. Ezen nézetei a konstruktív matematika megalkotásához vezettek, valamint a klasszikus matematika egy jelentős részének elutasításához [17]. Azonban Brouwer nem csak negatív módon járult hozzá az intuicionista matematikához, nem csak azzal, hogy elutasított néhány általa nem-megfelelőnek tartott klasszikus matematikai módszert. Nevéhez fűződik a *kiválasztási sorozatok* [choice sequence] fogalmának kidolgozása. Ezen sorozatok bevezetése vezette el Brouwert az egyenletes folytonosság tételének kimondásához[4]. Ezen tételről – mint az intuicionista matematika jellegzetes tételéről – később még lesz szó és – mint látni fogjuk – a kiválasztási sorozatokon kívül egyéb alapelvek is szükségesek bizonyításához (pl.: a folytonos választás elve).

Brouwer filozófiájára Kant és Schopenhauer volt a legnagyobb hatással. Filozófiájának legnagyobb eltérése Kantétól az, hogy a matematikai intuíció bázisából elhagyta a teret (mivel el akarta kerülni a nem-euklideszi geometriákkal való konfrontációt) és írásaiban kizárólag az idő intuíciójára hivatkozik [13].

Brouwer ugyan visszautasította a formalizmust, de elismerte hasznosságát általános intuicionista logikai elvek leírására. Formális intuicionista rendszereket tanítványa *Arend Heyting* (1898–1980) dolgozott ki, például a formális intuicionista propozicionális és predikátum logikát valamint az intuicionista aritmetikát. Később Glivenko, Gentzen és Gödel bizonyították be az intuicionista és a klasszikus elméletek ekvikonzisztenciáját. Ezen eredményekről az intuicionista logika leírásakor ejtünk majd szót részletesebben. Heyting – Kroneckerrel ellentétben – az egész számoknak sem tulajdonított semmiféle transzcendentális, gondolkodástól független létezést. Szerinte minden matematikai objektum – még ha talán független is az egyedi gondolati tevékenységtől – lényegét tekintve az emberi gondolkodás által meghatározott. Azonban Brouwer és Heyting filozófiai nézeteinek elfogadása nem szükséges az intuicionista matematikához. Teljesen más (például nyelvfilozófiai) alapokon is érvelhetünk a konstruktív logikai funktorok kizárólagos elfogadása mellett. Ezen érvekkel később foglalkozunk.

[4] Az intuicionista matematikában érvényes tétel, mely szerint minden $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény egyenletesen folytonos.

2.3. Finitizmus

Brouwer és Heyting matematikája még tartalmazott absztrakt fogalmakat, például: halmazokat és kiválasztási sorozatokat. Több matematikus kritizálta az absztrakt fogalmak használatát a matematikában, például: Kronecker, Skolem és Goodstein [14]. Ezen matematikusok egy nagyon korlátozott konstruktív matematika bevezetését javasolták, amelyben csak szigorúan véges matematikai objektumok használata megengedett (mint amilyen egy természetes szám) és ezeken az objektumokon csak konkrét (effektív) kombinatorikus műveleteket szabad értelmezni (mint amilyet például egy szorzótábla definiál). Természetesen a finitizmus teljesen konstruktív, és így része az intuicionista matematikának.

A finitista matematika feltűnik *David Hilbert* (1862–1943) német matematikus programjában is. Hilbert kifejtette, hogy a matematikai axiómarendszerek konzisztenciáját véges (finit) – a végtelenség matematikai fogalmától mentes – eszközökkel kell bizonyítani, és ezáltal kell a matematikát véglegesen biztos alapokra helyezni. *Kurt Gödel* (1906–1978) osztrák logikus *nemteljességi* tételeit általában úgy értékelik, mint amelyek meta-matematikai bizonyítását adják annak, hogy Hilbert bizonyításelméleti programja megvalósíthatatlan [13].

A finitizmusnak egy még radikálisabb változata is ismert, az ún. *ultra finitizmus*. Például Borel úgy goldolta, hogy egy nagyon nagy véges objektum (pl.: szám) legalább olyan problematikus mint egy végtelen. Direkt módon megfogalmazott olyan kérdéseket, hogy pédául a $10^{10^{10}}$ egy véges szám-e. A XX. század második felében történtek kísérletek az „alkalmas” [feasible] számok fogalmának megalkotására, de ezen törekvések még kezdetleges állapotban vannak.

2.4. Konstruktív rekurzív matematika

A konstruktív rekurzív matematika főleg *Andrej Andrejevics Markov* (1856–1922) nevéhez fűződik, és az algoritmusok vagy rekurzív függvények elméletén nyugszik. Primitív rekurzív függvényeket először Gödel használt nem-teljességi tételeinek bizonyításához (1931). *Alonzo Church* (1903-1995) dolgozta ki (teljesen más alapokon) a λ-kalkulust (1932), amely elmélet csak λ-absztrakciót használ és benne minden rekurzív függvény λ-definiálható [14]. Tőle függetlenül 1937-ben *Alan Mathison Turing* (1912–1954) bevezette az absztrakt matematikai gépek egy osztályát: a Turing gépeket. A Turing gépekkel kiszámítható függvények osztálya megegyezik a Church féle λ-kalkulussal kiszámítható függvények osztályával. Church tézise, amely azonosítja a „hatékonyan kiszámíthatóság” és a „rekurzívan kiszámíthatóság” fogalmát *Church–Turing* tézis néven vált ismerté.

Ezt a tézist Markov népszerűsítette és fektette le konstruktív matematikája alapjait: (1) a matematika objektumai különböző abc-k fölötti szavak; (2) realizálható absztrakció megengedett a matematikában, de nem megengedhetőek az aktuális végtelent használó absztrakciók. Markov a *normál algoritmusok* elméletén keresztül formalizálta matematikáját. Elmélete tekinthető úgy, mint egy rekurzív matematika intuicionista logikai alapokon. Bizonyos értelemben azonban Markov szigorúbb mint az intuicionisták, ugyanis csak olyan kiválasztási sorozatokat enged meg, amelyek egy véges algoritmus (például egy Turing gép) által előre meghatározottak [17]. Markov más tekintetben azonban engedékenyebb az intuicionistáknál, amire példaként a *Markov-elv*et [Markov's principle] hozhatjuk. Az elv egyszerűen azt mondja ki, hogy ha lehetetlen, hogy egy bizonyos Turing-gép örökké fut, akkor létezik egy olyan algoritmus, amely a kimenetet előállítja és fel kell tennünk, hogy a gép egyszer megáll (terminál). Bináris sorozatokra ezt az elvet például úgy mondhatjuk ki, hogy ha egy $(a_n \in \{0,1\})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra ellentmondás, hogy *minden* a_i tagja egyenlő 0, akkor létezik egy olyan tagja a sorozatnak amely egyenlő 1-el. Az intuicionisták ezt az elvet, mint intuitívan nem tisztát, elutasították [14].

2.5. Bishop konstruktív matematikája

Egyik kulcseleme az intuicionista matematikának / logikának, hogy tagadja a kizárt harmadik elvének érvényességét (ennek indoklásáról a 3. fejezet szól részletesebben). Sokan vélték úgy, hogy ez rendkívül korlátozottá teszi az intuicionista matematikát, például Hilbert a „Grundlagen der Mathematik" (1928) című művében így írt: *„A kizárt harmadik elvének kihagyása a matematikából ugyanolyan, mintha, például a csillagászokat megfosztanánk a teleszkóptól vagy a boxolókat attól, hogy az öklüket használják."*. Ezen nézetek radikálsan megváltoztak, miután *Erret Bishop* (1928–1983) publikálta „A konstruktív analízis megalapozása" (1967) című könyvét, melyben a modern analízis nagy részét intuicionista alapokon újra felépítette. Olyan absztrakt tételek konstruktívista változatát találjuk könyvében, mint amilyen a Stone–Weierstrass tétel, Hahn–Banach tétel, Hilbert tér beli önadjungált operátorok spektrál tétele, az absztrakt integrálok Lebesgue féle konvergencia tétele és olyan fogalmak intuicionista megfelelőit adta meg, mint a Haar mérték és a Fourier transzformáció [17].

Bishop elméletének egyik alapgondolata, hogy minden matematikának numerikus jelentéssel kell rendelkeznie. Ezen nézete közelebb áll Kronecker „aritmetizálási" programjához, mint Brouwer és Heyting megközelítéséhez, amelyben a természetes számok is csak az emberi elme termékei. Bishop matematikája ontológiailag neutrális, így az ő rendszerét pontosabb *episztemológiai-intuicionizmus*nak hívni, szemben Brouwer *ontológiai-intuicionizmus*ával.

2.6. Martin-Löf típuselmélete

Per Martil-Löf elméletében a matematikai objektumok olyan konstrukciók amelyek mindig együttjárnak a típusukkal. A típus megmutatja, hogy mit kell tennünk ahhoz, hogy egy ilyen objektumot megkonstruáljunk. Egy típus jóldefiniált, ha értjük, hogy mit jelent egy adott típushoz tartozni. Ezért, például az $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy típus, nem azért mert ismerünk bizonyos számelméleti függvényeket, hanem mert azt hisszük, hogy értjük a számelméleti függvény fogalmát általában.

Rendszerében minden állítás reprezentálható úgy, mint egy típus: nevezetesen az állítás bizonyításainak típusa. Megfordítva, minden típushoz tartozik egy állítás, az, amelyik azt mondja ki, hogy a típus nem üres. Martin-Löf elméletében minden konstruktív bizonyítás egy algoritmust testesít meg, sőt a bizonyítás konstrukciója maga egy ellenőrzés arra, hogy az algoritmus helyes, vagyis megfelel a specifikációjának. Ezen tulajdonságai a számítástudomány számára is nagyon ígéretessé teszik megközelítését [8].

3. A „tertium non datur" elvetése

Az intuicionista matematika egyik alaptézise, hogy a klasszikus (platonista) matematika érvénytelen következtetési formákat tartalmaz (például a kizárt harmadik elvét) és ezeket intuicionista (konstruktív) módszerekkel kell helyettesíteni. Ebben a fejezetben megvizsgálom, hogy milyen érveket szoktak felhozni az intuicionisták ezen állításaik alátámasztására. Először Brouwer ellenpéldái kerülnek bemutatásra, majd Pourciau és Dummett érveit ismertetem.

3.1. Brouwer „gyenge" ellenpéldái

Brouwer egy 1908-as cikkében mutatta be első kritikáit a kizárt harmadik elvéről. E dolgozatában adott néhány példát olyan esetekre, amikor nincs okunk arra, hogy a kizárt harmadik elvét igaznak tartsuk. Mivel ezek a példák szigorú értelemben nem cáfolják meg a kizárt harmadik elvét (továbbiakban: KHE), ezért szokás ezeket „gyenge" ellenpéldáknak nevezni [17]. Vegyünk például egy még mindig megoldatlan matematikai problémát, mondjuk a Goldbach sejtést[5]. Ezt a sejtését Goldbach egy Eulerhez írt levelében fogalmazta meg 1742-ben, de az azóta eltelt évszázadokban még senkinek sem sikerült bebizonyítania vagy cáfolnia. Brouwer szerint már maga a Goldbach sejtés is egy ellenpélda a KHE-re, ugyanis a jelenben még senki sem tapasztalta meg az igazságát (senki sem konstruált hozzá bizonyítást az elméjében) és senki sem tapasztalta meg a cáfolatát, ezért szigorúan szólva nem állíthatjuk, hogy: „a Goldbach sejtés vagy igaz vagy hamis". Egy bécsi előadásában Brouwer – szintén a Goldbach sejtés segítségével – további ellenpéldákat konstruált (KHE-re). A továbbiakban legyen $G(n)$ igaz, ha n előáll két prímszám összegeként és hamis különben. Ekkor nézzük a következő racionális számokból álló rekurzív (a_n) sorozatot: $a_0 = 1$ és

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} - (1/2)^n & \text{ha } \forall j \leq n\colon G(2j+2), \\ a_{n-1} & \text{ha } \exists k \leq n\colon \neg G(2k+2), \end{cases} \tag{1}$$

ez a sorozat jól definiált, mivel minden elemére van egy véges determinisztikus algoritmus amely kiszámítja azt. Továbbá a sorozat *Cauchy*-sorozat (intuicionista értelemben is), mivel a sorozat n-nél nagyobb indexű tagjai legfeljebb $(1/2)^n$ távolságra vannak egymástól. Ebből kifolyólag a sorozat konvergál és egy α valós számot definiál (a intuicionista valós számokról és Cauchy-sorozat intuicionista definíciójáról az 5. fejezetben lesz szó részletesebben). A sorozat definíciójából következik, hogy csak akkor tudjuk, hogy $\alpha = 0$ ha tudjuk, hogy mindig a definíció első fele az érvényes, tehát ha bebizonyítottuk a Goldbach sejtést. Hasonlóan $\alpha \neq 0$ -át is csak akkor tudnánk ha már cáfoltuk volna a sejtést, de ezidáig

[5] Mely szerint minden 2-nél nagyobb páros szám előáll két prímszám összegeként.

egyiket sem tette meg még senki. Ezen megállapítások a következő meglepő következményhez vezetnek: nem állíthatjuk, hogy $\forall x \in \mathbb{R} : x = 0 \vee x \neq 0$ mivel egy konkrét α számra ezt csak akkor tudjuk ha már bizonyítottuk, hogy $\alpha = 0$ vagy $\alpha \neq 0$. Tehát el kell vetnünk a kizárt harmadik elvét ha a valós számok effektív intuicionista definícióját fogadjuk el. Megjegyzem, hogy – az intuicionista logikában (amiben például nincs KHE) – abból, hogy $\neg \forall x \in \mathbb{R} : x = 0 \vee x \neq 0$ természetesen nem következik, hogy $\exists x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge x = 0$ (ami ellentmondás).

3.2. Brouwer „erős" ellenpéldái

Brouwer 1928-ban az „Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus" című művében közli az első „erős" ellenpéldáját a KHE-re, melyben megmutatja, hogy – az intuicionista valósszám-, függvény- és halmaz-fogalom elfogadásával – nem lehetséges szétvágni a valósszámok testét racionális és irracionális számokra [17]. Bebizonyította, hogy $\neg \forall x \in \mathbb{R} : (P(x) \vee \neg P(x))$, ahol $P(x)$ akkor igaz ha x racionális és $\mathbb{R}$ az intuicionista valósszám test. Az 5. fejezetben részletesen bemutatom az intuicionista valósszám fogalmat, addig is megelőlegzem, hogy egy valós szám az intuicionista matematikában egy racionális számokból álló Cauchy-sorozat (kiválasztási sorozat). A fenti állításnál több is igaz, nevezetesen, hogy egyáltalán nem lehet a valósszámok testét kettévágni úgy, hogy $A, B \subset \mathbb{R}$ olyan nem-üres halmazok [spread], hogy $A \cap B = \emptyset$ és $A \cup B = \mathbb{R}$. A bizonyítás a következő: tegyük fel, hogy szét lehet vágni $\mathbb{R}$-t nem-üres diszjunkt halmazokra, ekkor létezik egy olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, hogy:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ ha } x \in A, \\ 1 \text{ ha } x \in B, \end{cases} \tag{2}$$

ezen függvény totális, tehát Brouwer folytonossági tételéből következően (amelyről az 5. felyezetben lesz szó) folytonos is. De ekkor konstansnak is kell lennie, tehát vagy A vagy B egyenélő $\mathbb{R}$-el, és a másik halmaz üres. De feltettük, hogy egyik halmaz sem üres, így ellentmondáshoz jutottunk, tehát nem lehet nem-üres diszjunkt halmazokra kettévágni $\mathbb{R}$-t (quod erat demonstrandum). Tehát, ha elfogadjuk az intuicionisták fogalmait, el kell vetnünk a KHE-t [17]. Természetesen ez a nem-szétvághatósági [non-splittability] tétel nem érvényes a klasszikus matematikában, és kimondásához Brouwer felhasználta, hogy az intuicionista matematikában mind a valós számok, mind a halmazok[6] mind a függvények különbözőképpen vannak definiálva, mint a klasszikus esetben. Későbbi munkáiban Brouwer hasonló eszközökkel mutatta meg, hogy: $\neg \forall x \in \mathbb{R} : (\neg\neg\, x < 0 \to x < 0)$ valamint, $\neg \forall x \in \mathbb{R} : (\neg\neg\, x \neq 0 \to x < 0 \vee x > 0)$.

3.3. Pourciau tudománymetodikai érvei

Bruce Pourciau álláspontja szerint [10] egy kuhni értelemben vett tudományos forradalom [7] elméletileg lehetséges a matematikában. Azonban eddig még

[6] Ugyan Brouwer a „Menge" vagyis „halmaz" szót használta, de a későbbi angol nyelvű irodalom az esetleges zavarok elkerülésére a „spread" kifejezést vezette be.

nem tudunk róla, hogy a matematikában valaha lezajlott volna olyasfajta tudományos forradalom, mely után az új paradigmában a régi paradigma állításai inkoherensnek, nem megfelelően alátámasztottnak vagy egyszerűen hamisnak bizonyultak. Pourciau véleménye szerint azonban az intuicionizmus egy ilyen tudományos forradalom lehetőségét hordozta magában, de – főképp történeti okokból (például Brouwer extravagáns nézetei miatt) – elbukott.

Pourciau egy másik cikkében [11] – amit egy színdarab formájában írt meg – azon az állásponton van, hogy ha néhány nagyon egyszerű (szinte önevidensnek látszó) alapelvet elfogadunk a tudományos vizsgálatok alapelveiként, akkor ezekből már következik a intuicionizmus. Ezen elvek a következők:

1. Ismernünk kell egy állítás jelentését, mielőtt azt vizsgálnánk, hogy igaz-e.
2. Ne építsünk teljesen megalapozatlan feltevésekre.
3. Az egyszerűtől haladjuk a kevésbé egyszerű felé.

A matematika elsődlegességét a logikával szemben (Brouwer szellemében) például (1) és (2) támaszja alá: mivel a logika az állítások jelentésétől függetlenül vizsgálja igazságértéküket ez ellentmond (1)-nek, a kétértékűség elvének kritika nélkül való elfogadása pedig (2)-nek – állítja Pourciau [11]. A természetes számok axiomatikus felépítése ellen a (3) feltétel alapján lehet érvelni, mivel a természetes számok fogalma sokkal világosabb és egyszerűbb, mint mondjuk a Zermelo-Fraenkel féle axiómarendszer. Pourciau álláspontja szerint (1)-(3) elfogadásával nem egyeztethető össze a klasszikus platonista matematika.

3.4. Dummett szemantikai érve

Dummett a „The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic" (1973) című cikkében [4] több érvet is elemez, melyek azt próbálják meg alátámasztani, hogy a matematikában az intuicionista logika írja le a helyes érvelésformákat és nem a klasszikus logika. A két legfontosabb érv amit megvizsgál egy ontológiai és egy szemantikai érv. Az ontológiai érv szerint a matematikai állítások nem egy tőlünk független valóságra, hanem csak az általunk létrehozott tárgyakra vonatkoznak. Ez azonban még kevés – Dummett szerint – az intuicionista álláspont védelméhez, hacsak nem fogadunk el bizonyos feltevéseket a feltételes módú kondicionálisokra vonatkozóan. A másik érv a jelentéselmélet és szemantika szétválasztásának kritikáján alapul. Szerinte egy mondat jelentése nem választható el attól a kérdéstől, hogy hogyan alapozható meg a mondat igazsága. A matematikai állítások jelentését valamiféleképpen a bizonyítások által adottként kell tekintenünk. Ezt az érvét részletesen vizsgálta meg *Dag Prawitz* 1977-ben [12], a most következő rekonstrukció is részben Prawitz gondolatmenetét követi. Dummet szemantikai érvének három legfontosabb fázisa a következő:

Dummett először egy wittgensteiniánus jelentéselmélet mellett érvel. *Ludwig Wittgenstein* (1889–1951) a „Filozófiai vizsgálódások" -ban [16] ezt írja (43. szakasz): *„Az esetek nagy részében – ha nem is minden esetben –, amikor a „jelentés" szót használjuk, a szót így magyarázzuk: egy szó jelentése – használata a nyelvben."*. Több érv szól ezen jelentéselméleti elv elfogadása mellett: a legáltalánosabban talán úgy támasztható alá, hogy a jelentésnek közölhetőnek, a közlésnek pedig megfigyelhetőnek kell lennie. Egy más érv lehetne a nyelvtanulás érve, mely szerint egy nyelvet megtanulni annyit tesz, mint megtanulni egy bizonyos módon használni. Természetesen, ezen dolgozat kereteibe nem fér bele ennek az elméletnek mélyreható vizsgálata. Annyit azonban megjegyezném vele kapcsolatban, hogy jelentéselméleti alapon érvelni az intuicionizmus mellett teljesen ellentétes Brouwer (sokak által szolipszisztikusnak tartott) nézeteivel, mivel ő teljesen nyelvfüggetlen tevékenységnek tartotta a matematikát.

Második lépésként Dummett a platonista jelentéselmélet – mely szerint egy F mondat jelentésének az ismerete F igazságfeltételeinek az ismerete [12] – ellen érvel. Rámutat, hogy az *eldönthetetlen* állítások jelentésével komoly gond van egy platonista elméletben, ugyanis nem egészen világos, hogy mit kellene érteni ilyen esetekben az igazságfeltételek ismeretén. Dummett úgy gondolja, hogy a matematika-tanulás során nem az állítások igazságfeltételeit tanuljuk meg, hanem sokkal inkább azt, hogy mi számít igazságuk *megalapozásának*. Tehát ésszerűbbnek tűnik azt állítani, hogy a jelentés a bizonyítások által meghatározott. Azonban egy mondat használatának a matematikában vannak más jellemzői is: nemcsak azt tanuljuk meg, hogy hogyan bizonyítsuk be az állításokat, hanem azt is, hogy hogyan használjuk ezen állításokat más állítások bizonyításaiban. Amikor matematikai állítások használatát tanuljuk meg, akkor tulajdonképpen ebbe a két típusba tartozó szabályokat tanulunk meg. Tehát a jelentés használat által való adottsága a matematikában alkalmazva az jelenti, hogy az állítások jelentését[7] a bizonyítások és a bizonyítási szabályok határozzák meg.

Utolsó lépésként Dummett arra hívja fel a figyelmet, hogy még ha el is fogadjuk, hogy egy matematikai állítás jelentését a bizonyítások illetve a bizonyítási szabályok határozzák meg, ebből még nem következik, hogy a klasszikus logikát az intuicionista logikával kell helyettesíteni. Ehhez alá kell támasztanunk, hogy a szóban forgó bizonyítások az intuicionista és nem a klasszikus bizonyítások: felül kell vizsgálnunk a matematikai állítások használatát. Dummett a fenti wittgensteiniánus jelentéselmélet három lehetséges változatát vizsgálja meg, olyan szempontból, hogy ezen változatok elfogadásával mennyire lehet a használat intuicionista alapokon való felülvizsgálatát alátámasztani. Az első egy *holisztikus* elmélet, amely szerint az egyes mondatok jelentését nem kevesebb, mint a használat *egésze* szabályozza. Ezen álláspont szerint nem létezik a jelentésnek más, lényegi alapelve, így a bizonyításokkal adott jelentés sem egyeztethető össze vele.

A második vizsgált elmélet annyiban más mint a holisztikus, hogy kiválasztja a mondatok azon osztályát, melyek tartalma a nyelv fennmaradó részének használatától függetlenül adott. A többi mondat jelentését az határozza meg, hogy miként használjuk őket e kitüntetett osztály vonatkozásában. Például a *redukcionizmus* – amit Quine mint az empirizmus egyik dogmáját elutasít [9] – a tudományfilozófiában ilyen jelentéselméleti álláspontnak tekinthető. A matematikában ilyen elmélet a Hilberti program [12]. Ezekben esetekben a használat felülvizsgálatát az teszi szükségessé, hogy a kitüntetett mondatok igazságára kétféleképpen is következtethetünk: egyrészt saját jelentésük alapján igazak, másrészt

[7] Érdekességként jegyzem meg, hogy egy radikális fizikalista álláspont szerint a matematikai állításoknak nincsen jelentésük, lásd E. Szabó László cikkét [5].

más mondatokból is következtethetünk rájuk. De mi történik, ha konfliktusba kerül egy mondat kétféle megalapozása, nevezetesen azok a szabályok melyek alapján a mondatot állítjuk és azok a szabályok melyek alapján következtethetünk belőle. Ilyen esetekben az első fajtájú használatnak van elsőbbsége és éppen ezen konfliktushelyzetek elkerülése miatt kell lecserélnünk a klasszikus logikát az intuicionistára. A harmadik vizsgált álláspont a *molekuláris* jelentéselmélet, mely szerint egy mondat jelentése az alkotóelemeinek jelentésétől és ezek kompozíciójának módjától függ. Ha ezt az elméletet fogadjuk el, akkor nemcsak a kitüntetett mondatokra, de valamennyi mondatra kiterjeszthetjük, hogy egy állításához kétféle módon lehet eljutni (ti. közvetlenül és közvetve). Meg kell követelnünk, hogy a kétféle jelentés összhangban legyen egymással, tehát nem szabad megengedni, hogy közvetett eszközökkel olyan dolgot lehessen állítani, amit közvetlenül nem lehet belátni. Ebből a kikötésből már következik, hogy a klasszikus logikát felül kell vizsgálnunk és az intuicionista logikát kell elfogadnunk.

4. Intuicionista logika

Az intuicionista logika legfontosabb különbsége a klasszikus logikához képest, hogy benne az alternáció és az egzisztencia „szigorúbb” (nem-klasszikus) módon van értelmezve. Például $\vdash A \vee B$ csak akkor áll fenn, ha $\vdash A$ és $\vdash B$ közül legalább az egyik fennáll, és ennek következtében az intuicionista logikában nem érvényes a kizárt harmadik elve: $\vdash A \vee \neg A$ (mivel ha például A egy egyenlőre eldöntetlen állítást jelöl, akkor sem $\vdash A$ sem $\vdash \neg A$ nem áll fönn). Az alternáció értelmezéséhez hasonlóan a $\vdash \exists x A(x)$ is csak úgy lehetséges, ha van egy olyan t terminus, amellyel $\vdash A(t)$.

4.1. Brouwer–Heyting–Kolmogorov interpretáció

Az elsőrendű predikátum-logika egy konstruktív interpretációját adja az úgynevezett BHK (Brouwer–Heyting–Kolmogorov) interpretáció. A most bemutatásra kerülő interpretációt *Andrej Nyikolajevics Kolmogorov* (1903–1987) adta a logikai konstansok jelentéséről. Ezt az interpretációt nevezik „kvázi” szemantikának is (azért „kvázi” mert az „eljárás” és a „konstrukció” kifejezések nincsenek pontosan definiálva benne):

- $A \wedge B$ bizonyítását megadtuk, ha megadtuk A egy bizonyítását és B egy bizonyítását;
- $A \vee B$ bizonyítását megadtuk, ha megadtuk A és B közül legalább az egyiknek a bizonyítását;
- $A \to B$ bizonyítása olyan eljárás, amelynek alapján A tetszőleges bizonyításából megkaphatjuk B bizonyítását;
- $\forall x A(x)$ bizobnyítása olyan eljárás, amelynek alapján tetszőleges t objektum konstrukciója alapján megkapható $A(t)$ bizonyítása;
- $\exists x A(x)$ bizonyítása két részből áll: egy t objektum konstrukciójából és $A(t)$ bizonyításából;

- Az ellentmondásnak $\perp$ nincs bizonyítása. $\neg A$ bizonyítása egy eljárás, amely A egy tetszőleges (feltételezett) bizonyításából egy ellentmondás (például $0 = 1$) bizonyítását állítja elő.

4.2. Frege–Hilbert-stílusú kalkulus

Az elsőrendű intuicionista predikátum-logikára adhatunk mind természetes levezetésre épülő mind Frege–Hilbert-stílusú kalkulust (amelyekről belátható, hogy deduktíve ekvivalensek). Most – helytakarékosságból – csak egy Frege–Hilbert-stílusú kalkulust mutatok be, amit IQC-nek fogok nevezni. Egy eltérés a klasszikus predikátum-kalkulus (QC) felépítéséhez képest, hogy az axiómasémákban majdnem minden logikai konstans szerepel (kivéve mondjuk $A \leftrightarrow B$ amely az $A \to B \wedge B \to A$ formulát rövidíti) mivel a „klasszikus" definíciók kifejezései az intuicionista logikában nem érvényesek. Nyilván, nem mindegyik séma, amit QC fölépítésénél alapsémának tekintettünk szerepel IQC sémáiban:

$$
\begin{aligned}
&A \to (B \to A)\\
&(A \to B) \to \{[A \to (B \to C)] \to (A \to C)\}\\
&A \to [B \to (A \wedge B)]\\
&(A \wedge B) \to A\\
&(A \wedge B) \to B\\
&A \to (A \vee B)\\
&B \to (A \vee B)\\
&(A \to C) \to \{(B \to C) \to [(A \vee B) \to C]\}\\
&(A \to B) \to [(A \to \neg B) \to \neg A\\
&A \to (\neg A \to B)\\
&\forall x A(x) \to A(t)\\
&A(t) \to \exists x A(x)
\end{aligned}
$$

Temészetesen, az utolsó két séma csak akkor érvényes, ha x nem szerepel t-ben. A következtetési szabályok közül a szokásos *modus ponens* alkalmazható:

$$\frac{A \quad A \to B}{B}$$

a kvantoros formulákra vonatkozóan pedig:

$$\frac{A \to B}{\exists x A(x) \to B} \quad \text{és} \quad \frac{B \to A}{B \to \forall x A(x)}$$

– amennyiben x-nek nincs szabad előfordulása B-ben. Megjegyzem, hogy nem csak a kizárt harmadik elve ($A \vee \neg A$) de a kettős tagadás elve ($\neg\neg A \to A$) is kimaradt a sémák közül, ennek oka pedig, hogy belőle és az intuicionista logikában is érvényes $\neg\neg(A \vee \neg A)$ formulából a modus ponens segítségével KHE-t le lehetne vezetni. Ha az $A \vee \neg A$ vagy a $\neg\neg A \to A$ sémát csatoljuk IQC-hez, akkor a klasszikus elsőrendű logika – valamelyest redundáns – kalkulusát kapjuk (QC). Az intuicionista logikában (a KHE elvetése miatt) a *reductio ad absurdum* típusú érvek csak negatív állításokat bizonyítanak (mivel $\neg\neg A \to A$ általában nem érvényes IQC-ben). Érdemes még a következő általános megjegyzéseket tenni: az intuicionista propozicionális-logikában nem minden formulának van konjunktív vagy diszjunktív normálformája valamint az intuicionista predikátum-logikában nem minden formulához van vele ekvivalens prenex formula [17].

4.3. A klasszikus logika fordítása intuicionistára

Egy alapvető eredmény az intuicionista logikával kapcsolatban, hogy a klasszikus és intuicionista (propozicionális- és predikátum-) logika ekvikonzisztens. A propozicionális logikára ezt Glivenko bizonyította be először 1929-ben. A klasszikus propozicionális-kalkulust jelöljük PC-vel míg az intuicionista megfelelőjét IPC-vel (amit IQC-ből úgy kaphatunk, hogy elhagyjuk az utolsó két axiómasémát és a formulák csak propozíciókat és $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ jeleket tartalmazhatnak). Glivenko bebizonyította, hogy egy A formulára PC-ben $\vdash A$ akkor és csak akkor, ha IPC-ben $\vdash \neg\neg A$. (Sőt negációval kezdődő formulákra: PC-ben $\vdash \neg A$ akkor és csak akkor, ha IPC-ben $\vdash \neg A$ [13].)

A predikátum-kalkulus esetére egy ennél bonyolultabb a „negatív fordítás” fogalmát használó tétel mondható ki, amit egymástól függetlenül Gödel és Gentzen bizonyított be. E tétel szerint egy L nyelv minden A formulájára megadható egy olyan $g(A)$ formula, hogy a következő három állítás teljesül [17]:

1. QC-ben $\vdash A \leftrightarrow g(A)$;
2. IQC-ben $\vdash g(A) \leftrightarrow \neg\neg g(A)$;
3. Ha QC-ben $\vdash A$, akkor IQC-ben $\vdash g(A)$.

A $g(A)$ formulát nevezik az A negatív fordításának, konstrukciója a következő:

- $g(A)$ legyen $\neg\neg A$ ha A atomi formula;
- $g(A \wedge B)$ legyen $g(A) \wedge g(B)$;
- $g(A \vee B)$ legyen $\neg(\neg g(A) \wedge \neg g(B))$;
- $g(A \rightarrow B)$ legyen $g(A) \rightarrow g(B)$;
- $g(\neg A)$ legyen $\neg g(A)$;
- $g(\forall x A(x))$ legyen $\forall x g(A(x))$;
- $g(\exists x A(x))$ legyen $\neg\forall x \neg g(A(x))$.

4.4. Kripke-modellek

Sokféle interpretáció létezik az intuicionista rendszerekhez (például Klenee, Beth és Aczél is adtak interpretációkat) azonban most csak Kripke lehetségesvilág szemantikáját (1965) fogom röviden ismertetni. Erre a szemantikára nézve az intuicionista predikátum-logika *helyes* és *teljes* [17].

Informálisan a Kripke-modellre úgy gondolhatunk, mint amelyik egy ideális szubjektum lehetséges (tudat) állapotait írja le. Ez a szubjektum tételeket bizonyít és (matematikai) objektumokat konstruál. Idealizált abban az értelemben, hogy $\perp$-ot sohasem bizonyítja be és amit egyszer bebizonyított vagy megkonstruált azt sohasem felejti el. Ennek a szubjektumnak a lehetséges állapotait egy „fa-szerű” struktúrával reprezentálhatjuk: minden α (idő)pontnak megfelel egy

D_α univerzum és egy D_α alaphalmazú R_α struktúra (D_α-n értelmezett relációk egy összessége). $\alpha \leq \beta$ jelöli azt, hogy β nem előbbi (időpont), mint α; a lehetséges időpontok összességét jelölje T. $\leq$ nem feltétlenül lineáris rendezés.

Formálisan egy Kripke-modell egy $\mathcal{M} = \langle T, \leq, D, S, \Vdash \rangle$ rendezett-ötös, ahol T egy halmaz (a „lehetséges időpontok vagy állapotok" halmaza), $\leq$ reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus reláció T-n, D és S pedig T-n értelmezett függvények: $S(\alpha)$ minden α esetén egy $D(\alpha)$ alaphalmazú struktúra; továbbá amennyiben $\alpha \leq \beta$, úgy $S(\alpha) \subseteq S(\beta)$ minden $\alpha, \beta \in T$ -re.

$\alpha \Vdash A$ jelöli azt, hogy az α időpontban A igaz. (Az ideális szubjektum tudja, hogy A.) Ha A atomi mondat, akkor

(0) $\alpha \Vdash A \leftrightarrow S(\alpha) \vDash A$;

A logikai konstansokra vonatkozó szabályok:

(1) $\alpha \Vdash A \wedge B \leftrightarrow \alpha \Vdash A$ és $\alpha \Vdash B$;
(2) $\alpha \Vdash A \vee B \leftrightarrow \alpha \Vdash A$ vagy $\alpha \Vdash B$;
(3) $\alpha \Vdash A \rightarrow B \leftrightarrow \forall \beta \geq \alpha$ esetén, ha $\beta \Vdash A$, akkor $\beta \Vdash B$;
(4) $\alpha \Vdash \forall x A(x) \leftrightarrow \forall \beta \geq \alpha$ és $\forall t \in D(\beta)$ esetén $\beta \Vdash A(t)$;
(5) $\alpha \Vdash \exists x A(x) \leftrightarrow \exists t \in D(\alpha)$, hogy $\alpha \Vdash A(t)$;
(6) $\alpha \Vdash \neg A \leftrightarrow \forall \beta \geq \alpha$ esetén $\beta \nVdash A$.

5. Intuicionista matematika

Ebben a fejezetben nagyon röviden ismertetem az intuicionista matematika néhány alavető fogalmát és tételét. A természetes számok segítségével (amelyek például a Heyting-aritmetika által adottak) az egész és a racionális számokat ugyanolyan módon konstruálhatjuk meg, mint a klasszikus matematikában. Az intuicionista matematikában egy valós szám egy $x =< x_1, x_2, \ldots >$ racionális számokból álló Cauchy-sorozat, amelyet nem feltétlenül kell egy szabálynak előre meghatároznia (csak Markov elméletében). Nem feltétlenül szükséges az sem, hogy ekvivalencia-osztályokba rendezzük az így kapott sorozatokat. A Cauchy-sorozat (Bishop által adott) intuicionista definíciója a következő:

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : |x_m - x_n| \leq 1/m + 1/n$$

Az ilyen racionális Cauchy-sorozatokat hívjuk *kiválasztási sorozatok*nak. Az intuicionista matematika egy alapvető tulajdonságára mutat rá a következő megfigyelés. Legyen $P \subseteq (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}) \times \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $a \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ -ra létezik egy olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $(a, n) \in P$. Konstruktivista nézőpontból ez azt jelenti, hogy van egy véges eljárás, amelyik bármely a sorozatra kiszámítja n-t. Brouwer elmélete alapján, egy $a \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ konstrukciója mindig befejezetlen, tehát bármely pillanatban csak egy véges szeletét ismerjük a-nak. Tehát az eljárásnak mindenképpen a egy véges $< a_1, a_2, \ldots, a_N >$ kezdőszeletéből kell meghatároznia azt az n-et amelyre $(a, n) \in P$. Vegyük észre, hogy ekkor az eljárás ugyanazt az n-t fogja rendelni minden olyan $b \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ -ra is amelyre teljesül, hogy

$a_i = b_i$ ha $i \leq N$. Ebből a konstruktivista elvből – mely szerint minden kiválasztási sorozatokon értelmezett függvény minden sorozatra annak *véges* kezdődrésze alapján kell, hogy eldöntse, hogy mit rendel ahhoz a sorozathoz (amely elvet a „folytonos választás elvének” [principle of continuous choice] nevezik) – következik, hogy minden $\mathbb{R}$-et önmagába képező függvény (egyenletesen) folytonos, sőt általánosabban minden teljes, nem-üres, szeparábilis metrikus teret egy másik metrikus térbe képező függvény is folytonos. Ezt az eredményt is felhasználta Brouwer „erős” ellenpéldáinak megalkotásához.

Hivatkozások

1. Carnap, Rudolf: A régi és az új logika. Erkenntnis (1930). In: A Bési Kör filozófiája, Gondolat Kiadó (1972) pp. 197–217
2. Dummett, Michael: Elements of Intuitionism. Oxford: Clarendon Press (1977)
3. Dummett, Michael: Realism. Synthese Vol. 55 (1982) pp. 55–112
4. Dummett, Michael: The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic (1973). In: Truth and Other Enigmas, Duckworth (1978) pp. 215–247
5. E. Szabó László: Formal Systems as Physical Objects: A Physicalist Account of Mathematical Truth. International Studies in the Philosophy of Science, Vol. 17, No. 2 (2003) pp. 117–125
6. Kant, Immanuel: A tiszta ész kritikája (1781). ICTUS Kiadó, Budapest (1995)
7. Kuhn, Thomas: A tudományos forradalmak szerkezete (1962). Osiris Kiadó (2000)
8. Martin-Löf, Per: On the Meanings of the Logical Constants and the Justifications of the Logical Laws. Nordic Journal of Philosophical Logic, Vol. 1 (1996) pp. 11–60
9. Quine, Willard Van Orman: Az empirizmus két dogmája (1951). In: Forrai–Szegedi (szerk.): Tudományfilozófiai szöveggyűjtemény, Áron Kiadó (1999) pp. 131–153
10. Pourciau, Bruce: Intuitionism as a (Failed) Kuhnian Revolution in Mathematics. Studies in History and Philosophy of Science, Vol. 31, No. 2 (2000) pp. 297–329
11. Pourciau, Bruce: The Education of a Pure Mathematician. The American Mathematical Monthly, October 1999, Vol. 106, No. 8, (1999) pp. 720–732
12. Prawitz, Dag: Jelentés és bizonyítás: a klasszikus és az intuicionista logika konfliktusa (1977). In: Csaba Ferenc (szerk.): A matematika filozófiája a 21. század küszöbén. Osiris Kiadó, Budapest (2003) pp. 123–163
13. Ruzsa Imre; Máté András: Bevezetés a modern logikába. Osiris Kiadó (1997)
14. Troelstra, Anne Sjerp; Van Dalen, Dirk: Constructivism in Mathematics. Vol. 1, North-Holland, Amsterdam (1988)
15. Weisstein, W. Eric (editor): MathWorld – A Wolfram Web Resource. Wolfram Research, Inc. http://mathworld.wolfram.com
16. Wittgenstein, Ludwig: Filozófiai vizsgálódások (1953). Atlantisz Kiadó (1998)
17. Zalta, Edward N. (editor): The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2003 Edition) http://www.seop.leeds.ac.uk

Tartalomjegyzék