A VÉLEMÉNYÖSSZEGZÉS PROBLÉMÁI

A racionális kollektív döntéshozás korlátairól

szakdolgozat

hallgató: Csáji Balázs Csanád
témavezető: Rédei Miklós

Eötvös Loránd Tudományegyetem,
Bölcsészettudományi Kar,
Filozófia Szak, 2006

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A társadalmi választások elméletének (*social choice theory*) egyik alapkérdése, hogy az egyéni vélemények ismeretében hogyan lehet „igazságosan" kollektív döntést hozni. Az utóbbi három-négy évben egy érdekes, új kutatási irány bontakozott ki, amelynek középpontjában a kollektív döntések igazságosságán kívül ezek „racionalitása" áll. Ez az új kutatási terület „véleményösszegzés" (*judgement aggregation*) néven vált ismertté. A kutatások megindulásához a döntő lökést C. List és P. Pettit: „Aggregating Sets of Judgements: An Impossibility Result" című 2002-es tanulmánya [15] adta. A jelen szakdolgozat fő célja List és Pettit alapvető – a racionális kollektív döntések korlátozottságára vonatkozó – eredményének bemutatása, valamint a tétel általánosításainak, elméleti és gyakorlati következményeinek ismertetése.

Egy természetes, régi múltra visszatekintő megközelítés, hogy közösségi döntéseknél a többség akaratát kell a kollektív döntésnek tekinteni. A XVII. században Hobbes Leviatánjában ezt írta a több emberből álló képviselőtestületekről:

> „*És ha a képviselő több emberből álló testület, a többség szavazatát valamennyiük szavazatának kell tekinteni.*" Hobbes, Leviatán, 16. fej. [9]

Hasonlóan, a többségi szavazás kitüntetett szerepe – hacsak nem a társadalmi szerződésről akarnak megegyezni az individuumok – Rousseau-nál is megtalálható:

> „*Csak egy törvény van, amely természeténél fogva egyhangú beleegyezést kíván, a társadalmi szerződés.* [...] *Az eredendő szerződéstől eltekintve a többség akarata mindig kötelezi a többieket.* " Rousseau, A társadalmi szerződésről, 4. könyv, 2. fejezet [21]

A XX. század folyamán a különböző szavazat- és vélemény- összegző mechanizmusok tulajdonságait formális eszközökkel is elkezdték vizsgálni. A kollektív véleményalkotással kapcsolatos egyik első formális eredmény May nevéhez fűződik, aki 1952-ben publikált cikkében [18] megmutatta, hogy ha individuumok egy csoportjának két alternatíva közül kell választania, akkor a *többségi szavazás* az egyetlen olyan véleményösszegző eljárás, amely teljesít néhány természetesnek tűnő feltételt: az univerzális értelmezési tartomány, anonimitás, neutralitás (vagy dualitás) és a monotonitás feltételeket. Sajnos, a többségi szavazás eme szép tulajdonsága nem marad meg már három lehetséges alternatíva esetén sem. A „Condorcet-paradoxon" példája mutaja, hogyha három alternatíva sorrendjének eldöntése a cél, akkor a lehetőségekre való páronkénti többségi szavazás nem megfelelő rendezéseket eredményezhet. Általánosan Arrow [1] bizonyította be, hogy ha individuumok egy csoportjának kettőnél több alternatíva között kell *preferencia rendezésben* megállapodnia, akkor nem létezik olyan „társadalmi jóléti függvény" (*social welfare function*), amely teljesíti az ilyen függvényektől minimálisan megkövetelt feltételeket, amelyek: univerzális értelmezési tartomány, gyenge Pareto-elv, függetlenség a lényegtelen alternatíváktól és diktátor-mentesség. Ennek oka, hogy preferencia-körök keletkezhetnek az összegzett preferencia-rendezésben, amely így matematikai értelemben nem lesz rendezés. Érdekesség, hogy Kemény János (akinek a nevéhez többek között a BASIC programozási nyelv megalkotása is fűződik) kidolgozott egy szabályt (*Kemeny rule*), amelynek segítségével – bizonyos feltételek mellett – el lehet kerülni a nemkívánatos preferencia-körök kialakulását a többségi döntés megalkotásánál [11].

Természetesen, List és Pettit most bemutatandó „no-go" tétele nem következménye Arrow eredményének, sokkal inkább egy lehetséges általánosítása annak, noha a két lehetetlenségi-tétel közötti logikai kapcsolat ennél összetettebb [16]. A két közösségi véleményalkotással kapcsolatos irracionalitási tétel összehasonlításával a List-Pettit tétel következményeit tárgyaló fejezetben foglalkozunk részletesebben.

Bár a List-Pettit tétel leginkább az analitikus társadalomfilozófia körébe sorolható, közvetlen elődjének az 1980-as években jogászok és közgazdászok által felfedezett „diszkurzív dilemma" (*discursive dilemma*) vagy más néven: „doktrinális paradoxon" (*doctrinal paradox*) jelenséget [12], [13] tekinthetjük. A doktrinális paradoxon az a jelenség, hogy amennyiben logikailag nem független kijelentésekről el kell dönteni, hogy közülük melyek igazak, és ezt a döntést az egyes kijelentésekre vonatkozó demokratikus többségi szavazással hozzuk meg, akkor előfordulhat, hogy a többségi szavazással hozott döntés eredményeképpen kialakult értékelése a kijelentéseknek sérti a kijelentések között fennálló logikai kapcsolatokat. A jelenség ily módon a többségi szavazásra alapozott demokratikus döntési mechanizmus irracionalitását mutatja. List és Pettit azt mutatták meg, hogy a szokásos többségi szavazásnak ez a racionalitást sértő tulajdonsága általános: izolálták olyan tulajdonságokat, melyeket *bármely* demokratikus (vagy tág értelemben igazságos) véleményösszegző mechanizmustól természetesnek látszik elvárni, és megmutatták, hogy *nem létezik* ezen tulajdonságokkal rendelkező véleményösszegző eljárás.

A szakdolgozat felépítése a következő. Ezen bevezetés után egy rövid társadalomfilozófiai áttekintéssel indul a dolgozat, amely a szerződéselméletekről és a racionális döntések elméletéről szól. Ezután, a társadalmi választások elméletével kapcsolatos néhány klasszikus eredmény kerül bemutatásra: először a May tétel, majd a Condorcet paradoxon és végül az Arrow tétel. A List-Pettit tétel alapgondolatának megismeréséhez a diszkurzív (avagy doktrinális) paradoxon példáján keresztül jutunk el. A doktrinális paradoxon általános változata – a List-Pettit tétel – a hozzá kapcsolódó fogalmakkal és a bizonyításával együtt kerül ismertetésre. Ezután megvizsgáljuk a tétel feltételeinek lehetséges gyengíthetőségeit vagyis azt, hogy hogyan lehetne mégis garantáltan racionális kollektív véleményösszegzést elérni. Végül, a tétel jelentőségének, következményeinek bemutatásával zárjuk a dolgozatot. Elemzésre kerül a tétel kacsolata Arrow klasszikus eredményével, valamint Amartya Sen ún. „liberális paradoxona” és a különböző napirend manipulációs eljárások.

2. Társadalomfilozófiai áttekintés

Ezen dolgozat a kollektív döntések racionális korlátait vizsgálja. A jelen fejezet célja, hogy a közösségi döntések analitikus, formális vizsgálatát tágabb társadalomfilozófiai környezetbe helyezze. Történeti szempontból a kollektív döntések a szerződéselméletekhez kapcsolhatók leginkább, azonban, a közösségi döntések modern, formális megközelítései a „racionális döntések elmélete” részének tekinthetők [2]. Először, röviden szólunk a modern szerződéselméletekről és a közösségi döntések vizsgálatának fontosságáról, majd a racionális döntések elméletébe adunk bevezetőt.

2.1. Szerződéselméletek

A modern „társadalmi szerződés” elméletek Hobbes-ig [9] és Rousseau-ig [21] nyúlnak vissza. A XX. században talán Rawls műve [20] tekinthető a legjelentősebb szerződéselméletnek. Ezen megközelítések kiinduló tézise, hogy egy konkrét társadalmi berendezkedést a benne résztvevő szubjektumok beleegyezése *legitimál*. A közönséges – például üzleti – szerződések esetében, minden félnek megvan az oka, hogy betartsa a szerződésben foglaltakat. Hasonlóan, a társadalmi szerződések esetében is meg kell lennie a résztvevők okának, hogy tiszteletben tartsák a kollektív szerződést, például adót fizessenek, betartsák a törvényeket, részt vegyenek a közösség döntéseiben. Ezen társadalomfilozófiai megközelítéseket néhányan racionalista vagy önkéntes szerződéselméleteknek nevezik [3]. Természetesen, a társadalmi szerződés nem egy konkrét történelmi esemény, hanem egy *hipotetikus* megegyezés.

A modern szerződéselméletek fő kérdése, hogyha megkérdeznénk az érintetteket, akkor mely elvekben egyeznének meg. Ezek az elméletek azonban kétszeresen is hipotetikusak. Egyrészt, nem aktuális felmérésről van szó, csak hipotetikus kollektív döntésről. A felmérés résztvevői csak feltételezett résztvevők, nem konkrét személyek, és egy idealizált nézőpontból vannak szemlélve, hogy hogyan viselkednének, ha elegendő információval rendelkeznének, megfelelően racionálisak és kellően pártatlanok lennének, stb. Másrészt, általában nem egy aktuálisan fennálló társadalmi rendszerrel kapcsoltban van megfogalmazva a társadalmi szerződés kérdése, hanem egy elképzelt rendszerrel kapcsolatban. Egy szóban forgó rendszer tehát akkor tekinthető legitimnek – ezen elméletek szerint – ha olyan a felépítése, hogy az idealizált nézőpontból tekintett tagjai önkéntesen meg tudnának egyezni a felépítésében [3].

Természetesen, a különböző szerzőknél jelentős különbség van a végeredményként előálló legitimnek tekintett társadalmi felépítés között. Például, a szerződéselméletek egyik előfutára – Hobbes – az abszolút (hatalom-megosztás és korlátozások nélküli) uralkodó hatalmát legitimálta [9]. Azonban, nála már kötelezettségeink forrása önnön beleegyezésünk, a társadalmi szerződést kalkulatív racionalitásunk diktálja (például a védelem és a béke hosszútávú fenntartása) és nem például történeti jog. A Leviatán (1651) egyik fő bizonyítandója, hogy a politika *tudomány*, amin Hobbes szükségszerű igazságok és belőlük dedukcióval levont következtetések diszciplínáját érti [17], ami nem is áll távol néhány analitikus megközelítéstől.

A szerződéselméletek számára fontos azonosítani azt a döntési helyzetet, amelyben az individuumok megpróbálnak megegyezni a társadalmi felépítésről. A klasszikus szerződéselméletekben ez a „természeti állapot” [9] [21]. Rawls-nál az „eredeti helyzet” (*original position*) veszi át ezt a szerepet, amely egy olyan „kiinduló állapot” (*initial situation*), amely biztosítja a benne elért alapvető eredmények méltányosságát. Ezért hívja Rawls ezt „méltányosságként felfogott igazságosságnak” (*justice as fairness*). Az eredeti helyzetben idealizált individuumok döntenek a tényleges társadalmi szereplők helyett. Ezen idealizált választók elől a „tudatlanság fátyla” (*veil of ignorance*) eltakar minden olyan specifikus információt, amelyet nem kívánunk érvényesíteni a döntés során. Például, a tudatlanság fátylának következtében a szavazó nem tudja, hogy mi a kora, neme, vallása és vagyoni helyzete, stb. Tulajdonképpen, ebben a fogalomban van elrejtve az igazságosság fogalma. Azt mutatja, hogy mely tényezőket nem szabad figyelembe venni a társadalmi újraelosztásnál. Az így kapott racionális, de bizonyos mértékig tudatlan ágensek egyeznek meg végül a valódi társadalmi szereplők helyett az igazságosságról. Mivel azonban – a tudatlanság fátylának köszönhetően – minden ágens ugyanazon információkkal és motivációkkal rendelkezik, az eredeti helyzet egy döntési helyzet és nem egy alkuhelyzet.

Egy társadalmi rendszer szerződéselméleteken nyugvó legitimációja legtöbbször egy döntési helyzetre vezethető vissza. Minden szerződéselmélet kell, hogy specifikáljon három dolgot: (1) a választókat, (2) a választási szituációt, (3) választási alternatívákat. Többen úgy érvelnek a szerződéselméletek ellen, hogy ezen összetevők ügyes megválasztásával szinte minden társadalmi rendszer legitimálható [3]. Továbbá, a választók idealizációjának jogosságát is meg lehet kérdőjelezni, például attól még hogy az én idealizált (racionális, pártatlan és jól informált) változatom (aki nem én vagyok!) beleegyezését adja egy szerződésbe, attól még *én*, lehet, hogy nem egyeznék bele. Rawls megoldása erre problémákra egy második szerződés, megállapodás feltételezése. Azé a megállapodásé, hogy a tudatlanság fátyla segíségével elfogadott elveket a társadalom szereplői magukra is érvényesnek tekintik.

Mivel a szerződéselméletek mélyén egy közösségi döntés található, ezért a racionális kollektív döntések vizsgálata kiemelkedő fontossággal bír számukra.

2.2. Racionális döntések elmélete

A racionális döntések elmélete sokak szerint [2] az egyik legfontosabb modern metodológiai irányzat a társadalomtudományokban. A racionális döntések elméletén nyugvó társadalomtudományok kiinduló hipotézise, hogy a társadalmi, politikai és gazdasági események valamint a társadalmi változások mindenekelőtt önérdekvédő, racionális, bizonyos korlátozások mellett saját költség-haszon szempontokat mérlegelő individuumok döntéseinek eredményeként felfogva érthetők meg.

A racionális döntések elméletét metaelméleti szempontból a megértés és a magyarázat különbözőségét hangsúlyozó „módszertani dualizmuson" kívül egyértelműen a „módszertani individualizmus" elfogadása jellemzi [2]. Módszertani individualizmuson azt a felfogást értjük, amely szerint minden társadalmi jelenségre individuumok terminusaiban adható tudományos magyarázat. A módszertani individualizmus ontológiai posztulátuma, hogy a társadalom egyénekből és ezek kapcsolataiból áll. A komplex társadalmi intézményeknek nincsenek személytelen elemei, minden ilyen kollektívum visszavezethető individuumokra, amelyek a társadalom atomjai. A módszertani individualizmus szerint az egyének felett létező szuperindividuumok (például, szervezetek, csoportok) vagy teljesen leírhatók individuumok segítségével, vagy puszta elméleti konstrukciók. Magyarázat szempontjából egy szuperindividuumhoz is lehet hiteket, vágyakat, célokat rendelni, de nem feledkezhetünk meg arról, hogy ez csak a kollektívumot alkotó egyének tulajdonságainak származéka.

A módszertani individualizmus ismeretelméleti posztulátuma [2], hogy a társadalmi, gazdasági, politikai és történelmi jelenségek szabályszerűségeinek leírásához egyének cselekvéseiből kell kiindulnunk, mivel általában csak az individuumok viselkedései közvetlenül hozzáférhetőek számunkra empirikusan.

A racionális döntések elmélete különböző metodológiai paradigmákat és formális modelleket foglal magában. A racionális döntéselméleti modellek közé sorolható például a játékelmélet és a közösségi döntések elmélete. Jelen dolgozatban, csak a teljes információ birtokában hozott (tehát bizonytalanságot nem tartalmazó) kollektív döntések természetével foglalkozunk. A vizsgált szituáció a következő lesz: adottak individuumok, a választható alternatívák és a racionális egyéni vélemények, például preferenciák. A dolgozat középpontjában a következő kérdés vizsgálata áll: milyen feltételek mellett lehet az individuumok racionális véleményét egy szuperindividuum vagy kollektívum véleményévé összegezni úgy, hogy az garantáltan racionális legyen. Egy újdonsága a dolgozatban központi szerephez jutó List-Pettit tétel megközelítésének, hogy abból indul ki, hogy nem az a célunk, hogy sok lehetséges alternatíva közül kiválasszunk egyet, hanem több, logikailag összefüggő kérdésben akarunk kollektív döntést hozni. Ez a megközelítés természetes, mivel például egy parlamenti vagy üzleti ülés alkalmával általában számos különböző kérdésben születik döntés, és ezen kérdések nem feltétlenül teljesen függetlenek egymástól. Az egyik kérdésben elfoglalt álláspontunk kihatással lehet más kérdésekre is.

3. Klasszikus eredmények

Mielőtt rátérnénk a List-Pettit tétel részletes ismertetésére, áttekintünk néhány fontosabb klasszikus eredményt a társadalmi választások elméletéből. Minden most bemutatandó tétel és eredmény a következő alapszituációból indul ki: adott a lehetséges választások X halmaza, amelyet egységesen napirendnek nevezünk. Adott továbbá $n \geq 2$ szavazó, akik az X-beli lehetőségekkel kapcsolatban kívánnak megegyezésre jutni. A szavazók halmazát N jelöli. Az i-edik szavazó véleményét a Φ_i struktúra (pl. halmaz) írja le, az összes egyén véleményét pedig egy vélemény-profil tartalmazza $\Phi = \langle \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n \rangle$. A most következő modellekben feltesszük, hogy a döntésben résztvevő individuumok preferenciái ismertek, és ezek ismeretében kell egy „igazságos" kollektív döntést hozni. Az egyéni vélemények – azaz a Φ – ismeretében a szavazás végeredményét megadó függvényt F jelöli. A fejezetben először a May tétel kerül bemutatásra, majd a Condorcet paradoxon és végül az Arrow tétel.

3.1. A May tétel

May klasszikus 1952-es eredménye [18] szerint, ha csak két alternatíva közül kell választani (tehát $|X| = 2$), akkor az egyszerű többségi szavazás típusú szavazatösszesítő eljárások azok, amelyek kielégítenek néhány alapfeltételt, amelyeket szükségesnek látszik minden „igazságos" véleményösszegző eljárástól megkövetelni. Ebben a modellben minden egyén egyetlen elemét választja ki X-nek, így a szavazatösszesítő függvény $F : D_F \to X$ alakú, ahol $D_F \subseteq X^n$. Egy hatékony és igazságos szavazat-összegző függvénytől a következő tulajdonságokat követelte meg May:

Univerzalitás: a szavazat-összegző függvénynek az összes lehetséges bemenetre tudnia kell eredményt számolni, azaz az értelmezési tartománya $D_F = X^n$.

Anonimitás: minden egyén szavazata egyenlő súllyal kerül elbírálásra, tehát a szavazat-összegzés invariáns a szavazók sorrendjének felcserélésére. Formálisan, ha $\sigma : N \to N$ az egyének egy permutációja, $\Phi_i \in X$ az i-edik individuum szavazata, akkor teljesülnie kell, hogy $F(\langle \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n \rangle) = F(\langle \Phi_{\sigma(1)}, \Phi_{\sigma(2)}, \ldots, \Phi_{\sigma(n)} \rangle)$.

Semlegesség: ha az összes egyén szavazatát megcseréjük (ha mindenki a másik alternatívát választja mint eddig), akkor a szavazat-összegzés kimeneteként kapott eredmény is felcserélődik. Tehát, a szavazás összesítéséhez használt függvény semleges a lehetőségeket illetően. Pontosabban megfogalmaza, legyen $X = \{x, y\}$ és jelölje „$\sim$" a másik alternatívát, tehát $\sim x = y$ és $\sim y = x$. Ekkor teljesülnie kell, hogy $F(\langle \sim\Phi_1, \sim\Phi_2, \ldots, \sim\Phi_n \rangle) = \sim F(\langle \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n \rangle)$ minde Φ-re. Ezen feltétel alól van egy kivétel, amikor n páros és a két alternatíva pontosan ugyanannyi szavazatot kapott. Ebben az esetben az egyik alternatíva javára kell eldönteni a szavazást, s ekkor szigorú értelemben nem lesz semleges a szavazat-összegző függvény. Ha egy állítás és a negáltja szerepel X-ben, akkor társadalomfilozófiai alapokon lehet amellett érvelni, hogy a negált állítás legyen a preferált eredmény[1] [15].

Monotonitás: tegyük fel, hogy a szavazat-összegzés eredménye egy $x \in X$, ekkor akárhány y szavazatot is cserélünk ki még x-re, az eredmény nem fog megváltozni. Formálisan felírva, ha $F(\langle \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n \rangle) = x$, akkor $F(\langle \Phi'_1, \Phi'_2, \ldots, \Phi'_n \rangle) = x$, ahol $\Phi'_i = x$ ha $\Phi_i = x$ (ha $\Phi_i = y$ volt akkor Φ'_i-re nem teszünk megkötést).

3.1. Tétel (May 1952). *Az egyéni véleményekből a kollektív döntést előállító F szavazat-összegző függvény akkor és csak akkor tudja kielégíteni az univerzaltási, anonimitási, semlegességi és monotonitási feltételeket ha többségi szavazás típusú.*

Egy szavazat-összegző függvény akkor *többségi szavazás* típusú, ha a következő alakú

$$F(\langle \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n \rangle) = \begin{cases} x & \text{ha } \sum_{i=1}^{n} \delta(\Phi_i = x) > n/2, \\ y & \text{különben,} \end{cases} \tag{1}$$

ahol $X = \{x, y\}$ és δ egy indikátor függvény, tehát $\delta(igaz) = 1$ és $\delta(hamis) = 0$.

A May tétel kiterjeszthető olyan esetekre is, amikor X több mint két elemű, de csak akkor ha továbbra is minden individuum csak egyetlen elemét választja ki az X halmaznak és a többi lehetőség között semmilyen különbséget nem tesz [8].

3.2. A Condorcet paradoxon

A May tételre sokan úgy tekintenek, mint a többségi demokráciáknak egy formális alátámasztására. Azonban, mi a helyzet, ha X több mint két elemű és az individuumok nem csak egy lehetőséget választanak ki, hanem megadják a *preferenciáikat* (tehát egy rendezést) a választási lehetőségekkel kapcsolatban? Lehetséges-e ilyenkor is hatékonyan és igazságosan kollektív döntést hozni? Ennek a kérdésnek a vizsgálatához először felelevenítjük a rendezés matematikai fogalmát.

Tekintsünk egy $R \subseteq A \times A$ homogén bináris relációt. Az R reláció *reflexív*, ha minden x-re xRx fennáll. Az R reláció *tranzitív*, ha xRy és yRz esetén xRz is teljesül. Az R reláció *anti-szimmetrikus*, ha xRy és yRx csak akkor áll fenn, ha $x = y$. Azt mondjuk, hogy az R reláció *rendezés*, ha reflexív, tranzitív és anti-szimmetrikus. Egy R rendezési reláció *teljes* vagy *lineáris* ha minden $x \neq y$ esetén xRy és yRx közül pontosan az egyik teljesül, másküllönben R *részleges*.

[1]Például, Hobbes szerint [9] ha egy bírósági tárgyaláson ugyanannyian szavaznak egy ember bűnössége mellett, mint ellene, akkor igazságosabbnak tűnik nem elítélni a vádlottat.

A preferencia-rendezésen alapuló szavazat-összegzés régi múltra tekint vissza. A francia felvilágosodás korában Borda és Condorcet is foglalkoztak behatóan a kérdéssel. Az ilyen módszerek – mivel erősen figyelembe veszik a sokadlagos preferenciákat is – „igazságosabbnak" hatnak, mint a csak a legjobbnak ítélt választást figyelebe vevő eljárások, azonban a manipuláció lehetősége is nagyobb. Borda módszere szerint a választók minden lehetőséghez egy számot rendelnek (maximum akkorát, ahány lehetőség van) és a győztes az az alternatíva lesz, amelyhez a legnagyobb összegzett szám tartozik. A Marquis de Condorcet által kidolgozott módszer szerint, ha minden szavazó megadja a preferenciáit egy lineáris rendezés formájában, akkor a kollektív döntést a *Condorcet-győztes* megtalálása jelenti. A Condorcet-győztes az a választás, amelyik lehetőség a legnagyobb abban a rendezési relációban, amelyiket úgy kaptunk az ismert individuális preferencia rendezésekből, hogy minden xRy relációról többségi szavazással döntöttünk. A *Condorcet-paradoxon* az a jelenség, hogy nem mindig létezik egyértelmű Condorcet-győztes. A többségi szavazással előállított reláció nem biztos, hogy rendezés, mégha az összes individuum preferenciái egyenként teljes rendezést is alkottak. A Condorcet-paradoxont legegyszerűbben egy példán keresztül szemléltethetjük. Tegyük fel, hogy három alternatíva $\{a, b, c\}$ között kell választania 3 individuumnak. Az egyéni preferenciákat és a relációkra való egyenkénti többségi szavazással előállt relaciót az alábbi táblázat tartalmazza:

	$a < b$	$b < c$	$c < a$
1. vélemény ($a < b < c$)	igen	igen	nem
2. vélemény ($b < c < a$)	nem	igen	igen
3. vélemény ($c < a < b$)	igen	nem	igen
többségi vélemény ($c < a < b < c$)	igen	igen	igen

Megfigyelhetjük, hogy a többségi véleményként előállt reláció nem rendezés matematikai értelemben, mivel egy *preferencia-kör* alakult ki, és így nincs Condorcet-győztes, noha mindhárom egyén preferenciái teljes rendezést alkottak.

Bár a Condorcet szavazási módszernek vannak gyengített változatai, amelyek garantálják a Condorcet-győztes létezését minden esetben – például a Schulze vagy a Smith módszer – azonban, ezek gyakran kontra-intuitív eredményeket szolgáltatnak, ami miatt ritkán alkalmazzák őket a politikai gyakorlatban. Egy konkrét példa lehet a módszer gyakorlati alkalmazására a „Free State Project" amely egy libertariánus mozgalom az USA-ban, s tagjai a Condorcet-módszerrel választják ki azt az államot, amelynek politikáját a szervezet tagjai átjelentkezéssel befolyásolni próbálják[2].

[2] http://freestateproject.org/

3.3. Az Arrow tétel

A Condorcet-paradoxont megvizsgálva az az érzésünk támadhat, hogy a paradoxon a lehetőségekre adott többségi szavazás tulajdonságai miatt következett be, de „kifinomultabb” módszerekkel elkerülhetőek lennének a preferencia-körök kialakulásai. Az Arrow tétel általánosan mondja ki, hogy néhány egyszerű feltétel mellett nincs olyan összesítő függvény, amelyik minden lehetséges esetben egy megfelelő rendezést állít elő, s ebben az értelemben a kollektív döntés potenciálisan irracionális.

Az Arrow tétel [1] alapkérdése, hogy bizonyos intuitív igazságossági feltételek mellett milyen preferencia-összesítő függvény szolgáltat minden lehetséges bemenetre matematikai értelemben helyes rendezést. Az ilyen F függényeket Arrow „társadalmi jóléti függvényeknek” (*social welfare function*) nevezi. A tétel állítása pedig az, hogy nem létezik a megkövetelt tulajdonságoknak eleget tevő függvény.

Az összesítő függvénytől megkövetelt tulajdonságok a következők:

(U) *Univerzális értelmezési tartomány*: a preferencia-összesítő függvénynek az összes lehetséges bemenetre tudnia kell eredményt számolni, tehát az értelmezési tartománya az összes lehetséges rendezett n-es, amelynek tagjai az alternatívákon értelmezett rendezések, azaz reflexív, tranzitív és anti-szimmetrikus relációk.

Ennek megfelelően az F preferencia-összesítő függvény argumentuma egy tetszőleges Φ rendezett n-es, ahol $\Phi = \langle \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n \rangle$ és mindegyik Φ_i egy rendezési reláció az alternatívák A halmaza felett. Az a jelölés, hogy $\Phi_i(x, y)$ azt mutatja, hogy az i-edik individuum jobban preferálja y-t, mint x-et. Az összegzett preferenciát a Φ preferencia-profil ismeretében $F(\Phi)$ jelöli. Az $F(\Phi)(x, y)$ azt jelöli, hogy az összesített preferencia-rendezésben előnyösebb az y alternatíva, mint x.

(P) *Gyenge Pareto elv*: ha minden $i \in N$-re $\Phi_i(x, y)$, akkor $F(\Phi)(x, y)$. Ez a feltétel azt mondja ki, hogy ha minden választó egyhangúan jobban preferálja y-t mint x-et, akkor az összesített véleményben is az y preferálva van x-el szemben.

(L) *Függetlenség a lényegtelen alternatíváktól*: tegyük fel, hogy adott két preferencia profil $\Phi = \langle \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n \rangle$ és $\Phi' = \langle \Phi'_1, \Phi'_2, \dots, \Phi'_n \rangle$. Ekkor, ha teljesül, hogy létezik x és y, hogy minden i individuumra $\Phi_i(x, y)$ akkor és csak akkor ha $\Phi'_i(x, y)$, akkor teljesülnie kell annak is, hogy $F(\Phi)(x, y)$ akkor és csak akkor, ha $F(\Phi')(x, y)$. Ez a felétel azt fejezi ki, hogy egy x, y alternatíva páros rendezése a kollektív-rendezés szerint csak az egyének x-re és y-ra vonatkozó preferenciáitól függ.

(D) *Diktátor-mentesség*: nem létezik olyan $i \in N$, hogy minden Φ-re $F(\Phi) = \Phi_i$. Ez a feltétel azt a meggyőződésünket formalizálja, hogy egy igazságos döntés nemdiktatórikus, azaz nem létezik egy olyan individuum, hogy a preferencia-összegzés mindig az ő véleményét adja eredményül, tekintet nélkül a többiek preferenciáira. Érdemes észrevenni, hogy ez egy sokkal gyengébb feltétel, mint az anonimitás, vagyis az, hogy minden egyén szavazata egyenlő súlyú. A diktátor-mentesség kritériumnak megfelel például egy olyan összegző-függvény is, ahol az összegzett véleményben csak egy kis csoport érdeke érvényesül. Tehát, csak diktátor-mentességet megkövetelni egy preferencia-összesítő függvénytől elég gyenge megszorítást jelent.

Az Arrow tétel állítása, hogy ezen feltételek mellett és több mint kettő alternatívát feltételezve ($|X| > 2$) nem létezik jó preferencia-összesítő függvény [1]:

3.2. Tétel (Arrow 1951). *Nem létezik olyan társadalmi jóléti függvény, amely minden preferencia-profilra helyes rendezést eredményez (tehát egy reflexív, tranzitív és anti-szimmetrikus relációt) és teljesíti az (U), (P), (L) és (D) feltételeket.*

Az Arrow tétel társadalomfilozófiai jelentőségéről nagy irodalom áll rendelkezésre, például arról, hogy pontosan mit (és mit nem) mond a társadalomfilozófia számára ez a lehetetlenségi tétel. Azonban, mivel ennek a dolgozatnak nem elsősorban az Arrow tétel a tárgya, ezért most nem érintjük ezeket a kérdéseket. Ezzel kapcsolatban sok referenciát találhatunk List és Pettit összehasonlító cikkében [16].

4. A diszkurzív paradoxon

A List-Pettit tétel közvetlen elődjének a jogászok által az 1980-as években felfedezett „diszukrzív paradoxon” tekinthető. Ebben a fejezetben néhány példán keresztül áttekintjük a paradoxont. Egy fontos különbség az eddig tárgyalt eredményekhez képest (pl. May tétel, Arrow tétel), hogy most nem egy alternatíva kiválasztása a cél, hanem egyszerre több kérdésben szeretnénk megállapodni és ezek a kérdések valamilyen logikai kapcsolatban vannak egymással. Tehát, a napirend sok – logikailag összefüggő – állítást tartalmaz, amelyekből ki szeretnénk választani egy részhalmazt, amely a kollektív döntést képviseli. A doktrinális paradoxon speciális példáiban minden állításról többségi szavazással döntenek az individuumok.

A diszkurzív (vagy doktrinális/bíró) paradoxont legegyszerűbb egy példán ismertetni. Jelöljön X és Y személyeket, és tekintsük a következő három kijelentést:

$$\begin{array}{ll} p_1: & \text{a szerződés } X \text{ és } Y \text{ között érvényes} \\ p_2: & X \text{ a szerződést megszegte} \\ q: & X \text{ kártérítésre kötelezett} \end{array}$$

Tegyük fel, hogy az a törvény (doktrina), hogy az X vádlott akkor és csak akkor kötelezett kártérítésre (elítélendő), ha a szerződés érvényes volt és X megszegte azt, azaz $q \equiv p_1 \wedge p_2$ (itt és a továbbiakban „$\wedge$” a logikai konjunkció, „$\equiv$” pedig az ekvivalencia jele). A bíróságnak azt kell eldöntenie, hogy X kártérítésre kötelezett-e. Amennyiben a bírák vagy szakértők nem értenek egyet a helyzet megítélésében, akkor valami módon döntést kell hozniuk. Egy lehetséges módszer az, hogy a bírák szavaznak a p_1, p_2 és q állítások mindegyikével kapcsolatban, és a döntést az egyes kijelentésekre vonatkozó többségi határozattal hozzák meg. Egy ilyen helyzetben lehetséges, hogy a következő szavazási eredmény áll elő:

	p_1	p_2	$q\ (\equiv p_1 \wedge p_2)$
1. bíró	igen	igen	igen
2. bíró	igen	nem	nem
3. bíró	nem	igen	nem

Az, hogy a fenti szavazási eredmény lehetséges, úgy értendő, hogy mindegyik bíró vagy szakértő *racionálisan* szavazott abban az értelemben, hogy mindegyik bírónak a p_1, p_2 és q kijelentések igazságára/hamisságára vonatkozó álláspontja összhangban van a p_1, p_2 és q állítások között fennálló $q \equiv p_1 \wedge p_2$ logikai relációval.

Ha a három bíró véleményéből egyetlen véleményt akarunk létrehozni többségi szavazással, akkor a többségi („összegzett”) vélemény a következő lesz:

	p_1	p_2	$q\ (\equiv p_1 \wedge p_2)$
1. bíró	igen	igen	igen
2. bíró	igen	nem	nem
3. bíró	nem	igen	nem
többségi vélemény	*igen*	*igen*	*nem*

A többségi vélemény azonban nem elfogadható, mert *nem racionális* abban az értelemben, hogy nem egyeztethető össze a kijelentések közötti $q \equiv p_1 \wedge p_2$ logikai relációval: ha mind a p_1 mind a p_2 kijelentést elfogadjuk, akkor konjunkciójukat nem utasíthatjuk el, ha nem akarjuk megsérteni a klasszikus kijelentéslogika szabályait. Ha tehát a bíróság többségi szavazással dönt, akkor kétféleképpen járhat el:

- Magáról a bűnösségről szavaz és hoz többségi döntést (konklúzió-alapú megközelítés (*conclusion-based approach*))
- A bűnösséget implikáló feltételek fennállásáról hoz többségi döntést és alkalmazza törvényt (premissza-alapú megközelítés (*premise-based approach*))

A doktrinális paradoxon az, hogy a kétféleképpen hozott döntés nem egyezik meg.

Felvetődhet a gondolat, hogy a példabeli paradox helyzet egyedi, tehát, hogy a p_1, p_2 és q állítások speciális logikai viszonya okozza a problémát, és más szituációkban nem áll elő hasonló nehézség, azonban nem ez a helyzet. Itt egy másik példa: tekintsük a p_1, p_2 és q kijelentéseket, melyek között a következő logikai reláció áll fenn $q \equiv p_1 \rightarrow p_2\ (\equiv \neg p_1 \vee p_2)$ (itt és a továbbiakban „$\neg p$” jelöli a p kijelentés tagadását, „$\vee$” pedig a logikai „vagy” jele). Ebben az estebben egy lehetséges szavazási szituációt és a többségi szavazással kapott végeredményt mutat az alábbi táblázat:

	p_1	p_2	$p_1 \rightarrow p_2$
1. szavazó	igen	igen	igen
2. szavazó	igen	nem	nem
3. szavazó	nem	nem	igen
többségi vélemény	*igen*	*nem*	*igen*

Világos, hogy a többségi vélemény logikailag nem megengedett értékelése a p_1, p_2 és $p_1 \to p_2$ kijelentéseknek (mivel „$\to$”-t materiális-implikációként értjük).

Mindez arra utal, hogy a diszkurzív paradoxon jelensége általános: valahányszor többségi szavazással összegzünk véleményeket olyan állításokkal kapcsolatban melyek logikailag nem függetlenek, a diszkurzív paradoxonhoz hasonló jelenség előfordulhat, és a kollektív vélemény lehet ebben az értelemben irracionális.

Az is világos, hogy ha a diszkurzív paradoxon jelensége általános, akkor jelentősége messze túlmutat a bírósági gyakorlaton: érintheti az összes olyan szituációt, melyben véleményeket kell összegezni többségi szavazással. A jelenségnek így speciálisan következménye van a többségi szavazásra alapozott demokratikus döntéshozatali eljárás racionalitására vonatkozóan. List es Pettit megfogalmazásában:

> *„Az ezen cikk szempontjából lényeges tanulsága a diszkurzív paradoxonnak nem az, amit a jogi irodalomban levonnak, hogy t.i. nehéz választásra vagyunk kényszerítve azt illetően, hogy egy valamely konklúzióra vonatkozó kollektív ítéletet magára a konklúzióra vagy pedig a premisszákra vonatkozó szavazással döntsünk-e el. Az az általánosabb tanulság, hogy ha a szokásos többségi szavazással hozunk létre ítélet-halmazokat individuális ítélet-halmazok összesítésével, akkor lehetséges, hogy olyan ítélethalmazokat kapunk eredményül, melyek irracionálisak, még akkor is, ha az individuális ítélethalmazok maguk teljességgel racionálisak.”* [15]

Ebben a szituációban természetes reakció azt gondolni: sebaj, ha az egyszerű többségi szavazás a fenti értelemben irracionális, akkor majd nem egyszerű többségi szavazással összegezzük a véleményeket, hanem valamely más olyan módon (pl. minősített többséggel) amely biztosítja, hogy a döntéshozatal demokratikus, de elkerüli az egyszerű többségi szavazás fentebb részletezett irracionalitását. List és Pettit tanulmányának jelentősége az, hogy megmutatták:

> *„. . . általában nem létezik bizonyos természetes (a többségi szavazás által kielegített) feltételeknek megfelelő véleményösszegezési eljárjás, amely kijelentések egy halmazának racionalitási föltételeket kielégítő értekelését úgy összegezné, hogy az összegezett értekelés szintén kielégíti a kijelentések értekelésével szemben támasztott racionalitási követelményeket.”* [15]

Röviden: List és Pettit azt mutatták meg, hogy *logikailag összefüggő kijelentésekre vonatkozó minden olyan véleményösszegző eljárás (szavazás), amely a többségi* *szavazás néhány olyan lényegi tulajdonságával rendelkezik, melyeket egy demokratikus szavazási rendszertől természetesnek látszik megkövetelni: irracionális*. Észrevehetjük az analógiát, hogy a doktrinális paradoxon úgy viszonyul a List-Pettit tételhez, mint a Condorcet paradoxon az Arrow tételhez. A következő fejezetben részletesen bemutatjuk a List-Pettit tételt, amely – mint látni fogjuk – bizonyos értelemben tekinthető az Arrow tétel általánosításának.

5. A List-Pettit tétel

Ebben a fejezetben a kollektív döntések potenciális irracionalitását kimondó List-Pettit tétel kerül bemutatásra. A tétel alaphelyzete a következő: adott egy n individuumból álló közösség, amelynek tagjai több, logikailag összefüggő kérdésben akarnak megegyezésre jutni. Ilyen szituáció lehet például egy parlamenti ülés, ahol általában a megszavazandó törvények és határozatok nem teljes mértékben függetlenek egymástól: néhány kérdésben elfoglalt álláspontok kihatással lehetnek más kérdésekre is. Azon állítások halmazát, amelyekkel kapcsolatban kollektív döntést szeretnénk hozni, napirendnek hívjuk. Feltesszük, hogy a napirend pontjai között fennálló logikai kapcsolatok leírhatók propozícionális logikai eszközökkel. Minden individuum véleménye megadható egy halmazzal: azon állítások halmazával, amelyeket elfogad a napirendből. Az egyéni vélemények ismeretében egy véleményösszegző függvény állítja elő a közösségi döntést, amely szintén a napirend egy részhalmaza. Ettől a függvénytől több – a véleménynyilvánítási szabadsággal és a döntés igazságosságával összefüggő – tulajdonságot megkövetelünk majd, és azt fogjuk vizsgálni, hogy milyen körülmények között tud egy véleményösszegző függvény minden olyan esetben, amelyben az egyének véleménye racionális volt, racionális kollektív döntést eredményezni. Arról részletesen lesz szó, hogy mikor tekintünk egy véleményt racionálisnak. A tétel pontos kimondásához bevezetünk néhány fogalmat:

1. Jelölje $n \geq 2$ a szavazók számát és $N = \{1, \ldots, n\}$ a szavazók halmazát.

2. Legyen $X = \{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$ a kijelentéslogika (jól-formált) formuláinak egy részhalmaza. Ezen halmaz állításairól szavaznak az N-ben szereplő individuumok. Az X halmazt *napirendnek* hívjuk.

3. A napirendről feltesszük, hogy nem tartalmaz kettős tagadással kezdődő állításokat ($\neg\neg\phi \notin X$), valamint, hogy minden állítás negáltja is szerepel a napirendben, azaz minden $\phi \in X$-re $\sim\phi \in X$, ahol

$$\sim\phi = \begin{cases} \neg\phi & \text{ha } \phi \text{ maga nem negációval kezdődik} \\ \psi & \text{ha } \phi = \neg\psi \end{cases} \tag{2}$$

4. Feltesszük továbbá, hogy a napirend tartalmaz legalább kettő nem-triviálisan összefüggő formulát. Például, $X = \{p, q, p \wedge q, \neg p, \neg q, \neg(p \wedge q)\}$. (Azt mondjuk, hogy ϕ „triviális” módon összefügg ψ-vel, ha ϕ ekvivalens ψ-vel vagy $\neg\psi$-vel, vagy valamelyik tautológia vagy ellentmondás.)

5. Az i-edik szavazó véleményét a $\Phi_i \subseteq X$ halmaz írja le; Φ_i tartalmazza az összes i által X-ből elfogadott („igenelt”) állítást.

6. A $\Phi = \langle \Phi_1, \ldots, \Phi_n \rangle$ rendezett n-es („vektor”) – amelyet gyakran $\langle \Phi_i \rangle_{i \in N}$ alakban írunk – a szavazói vélemények profilja (a szavazók csoportja által elfogadott állítások összessége). Nyilván $\Phi \in \mathcal{P}(X)^n$, ahol $\mathcal{P}$ hatványhalmazt jelöl.

5.1. A racionalitás feltételei

A racionalitási feltételeket az i-edik szavazó által igenelt állítások Φ_i halmazára vonatkozóan fogalmazzuk meg. Ezek a feltételek a teljesség, a konzisztencia és a deduktív zártság lesznek. A feltételek pontos definíciója a következő:

Teljesség: *Φ_i teljes, ha bármely $\phi \in X$ esetén $\phi \in \Phi_i$ vagy $\sim\phi \in \Phi_i$.* A teljesség jelentése: a napirenden szereplő bármely állításra igaz, hogy vagy ő, vagy a tagadása el van fogadva (a szóban forgó individuum által).

Konzisztencia: *Φ_i konzisztens, ha nincs olyan $\phi \in X$, hogy $\phi \in \Phi_i$ és $\sim\phi \in \Phi_i$.* A konzisztencia jelentése: ha egy állítás szerepel egy szavazó által elfogadott állítások között, akkor a tagadása – természetesen – nem szerepelhet.

Deduktív zártság: *Φ_i deduktíve zárt, ha minden $\phi \in X$ esetén, ha $\Phi_i \vdash \phi$, akkor $\phi \in \Phi_i$.* A deduktív zártság jelentése: minden i esetén, az i-edik szavazó által elfogadott állítások minden olyan következménye, amely a napirenden szerepel, szintén igenelve van az i-edik szavazó által. Fontos, hogy csak a napirendben szereplő következményekkel kapcsolatban követeljük meg a deduktív zártságot, s így nem kívánunk lehetetlent a választóktól (például logikai mindentudást).

5.1. Definíció. *Egy Φ_i állítás-összesség racionális, ha teljes, konzisztens és deduktíve zárt. Hasonlóan, egy $\Phi = \langle \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n \rangle$ vélemény-profil racionális, ha minden $i \in N$ individuum esetén az ő véleményét leíró Φ_i állítás-összesség racionális.*

A következő diszkurzív paradoxon mutatja, hogy egy racionális vélemény-profil többségi szavazással való összesítésének eredménye *nem* minden esetben racionáils:

	p	q	$p \wedge q$
1. szavazó	igen	igen	igen
2. szavazó	igen	nem	nem
3. szavazó	nem	igen	nem
többségi vélemény	*igen*	*igen*	*nem*

Megfigyelhetjük, hogy mindegyik egyéni vélemény-halmaz racionális, de a többségi konklúzió nem (mert $p, q \vdash p \wedge q$ de $p \wedge q$ nincs a többségi szavazással kiszámolt eredményben). Megjegyezzük, hogy a definíció értelmében a napirendnek tartalmaznia kell még a $\neg p$, $\neg q$ és a $\neg(p \wedge q)$ állításokat is, de mivel feltettük, hogy a szavazók racionálisak, ezért az ezekre adott szavazatok már egyértelműen meghatározottak.

5.2. Az igazságosság feltételei

A véleményösszegező mechanizmust egy olyan F függvényként foghatjuk fel, amely egy összesített vélemény-halmazt rendel minden egyes n tagú vélemény-profil vektorhoz. Formalisan tehát, ha $\mathcal{P}(X)$ jelöli az X napirend összes részhalmazainak halmazát és a szorzást direk- (Descartes-) szorzatnak tekintjük, akkor:

$$F\colon \mathcal{D}_F \to \mathcal{P}(X), \qquad \mathcal{D}_F \subseteq \mathop{\times}_{i=1}^{n} \mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(X)^n \tag{3}$$

Természetesen, nem akármilyen véleményösszegző függvényt engedünk meg. Ennek a függvénynek teljesítenie kell néhány alapfeltételt, amelyek a véleményösszegzés igazságosságát és hatékonyságát biztosítják. A véleményösszegző függvényektől három tulajdonságot fogunk megkövetelni, ezek az (1) univerzális értelmezési tartomány, az (2) anonimitás és a (3) szisztematicitás lesznek.

Univerzális értelmezési tartomány: *$\mathcal{D}_F$ tartalmazza az összes olyan vélemény-profilt, amely teljesíti a racionalitási feltételeket, azaz amely teljes, konzisztens és deduktíve zárt formulahalmazokból áll.*

Az univerzalitási tulajdonság nagyon természetes: nem lenne elfogadható, ha az összegzőfüggvény néhány racionális szavazási kimenetelre nem tudna kollektív véleményt összegezni és így korlátozná a választási szabadságot.

Anomimitás: *F értéke invariáns a szavazók felcserélésére (nem függ a szavazók sorrendjétől). Formálisan, ha $\sigma : N \to N$ az individuumok egy lehetséges permutációja (σ egy bijekció N-en) akkor $F(\langle \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n \rangle) = F(\left\langle \Phi_{\sigma(1)}, \Phi_{\sigma(2)}, \ldots, \Phi_{\sigma(n)} \right\rangle)$.*

Az anonimitás feltétel lényegesen összefügg a véleményösszegzés demokratikus jellegével: azt fejezi ki, hogy mindenkinek a szavazata/véleménye ugyanolyan státuszú, nincs kitüntetett szavazó (pl. nincs diktátor). Megjegyzésre érdemes, hogy az anonimitás egy erősebb feltétel, mint az Arrow tétel feltételei között szereplő diktátormentesség. Azonban, – mint ahogyan látni fogjuk – ez a feltétel gyengíthető és diktátor-mentesség esetén is érvényben marad a List-Pettit tétel állítása.

Szisztematicitás: *Bármely két az F értelmezési tartományából vett $\Phi = \langle \Phi_i \rangle_{i \in N}$ és $\Phi' = \langle \Phi'_i \rangle_{i \in N}$ vélemény-profilokra kikötjük, hogy ha [két – a napirendből vett – ϕ és ψ formulára teljesül, hogy minden $i \in N$ szavazó esetén $\phi \in \Phi_i$ akkor és csak akkor ha $\psi \in \Phi'_i$] akkor teljesülnie kell annak is, hogy [$\phi \in F(\Phi)$ akkor és csak akkor ha $\psi \in F(\Phi')$].* A szisztematicitási feltételt teljesen formálisan is felírhatjuk:

$$\forall \Phi, \Phi' \in \mathcal{D}_F : \forall \phi, \psi \in X : (\forall i \in N : \phi \in \Phi_i \leftrightarrow \psi \in \Phi'_i) \rightarrow \tag{4}$$

$$\rightarrow (\phi \in F(\Phi) \leftrightarrow \psi \in F(\Phi'))$$

Gyakran hasznos a szisztematicitási feltétel egy ekvivalens átfogalmazása, amely a következőképpen adható meg: létezik egy olyan $f \colon \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ függvény, hogy bármely $\Phi = \langle \Phi_i \rangle_{i \in N} \in \mathcal{D}_F$ esetén $F(\Phi) = \{\phi \in X \mid f(\delta_1(\phi), \ldots, \delta_n(\phi)) = 1\}$, ahol minden $i \in N$-re és $\phi \in X$-re: $\delta_i(\phi) = 1$ ha $\phi \in \Phi_i$ és $\delta_i(\phi) = 0$ ha $\phi \notin \Phi_i$. Mivel egy szisztematikus F összegzőfüggvénynek kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető egy f függvény, gyakran f-et is összegzőfüggvénynek hívjuk.

A szisztematicitás két tulajdonságot foglal magában:

1. Az, hogy a napirendnek egy bizonyos $\varphi \in X$ állítása az összegezett véleményben szerepel-e, tehát el van-e fogadva, csak attól függ, hogy hogyan szavaztak a szavazók erre a φ napirendi pontra (és így nem függ attól, hogy a napirenden szereplő más állításokkal kapcsolatban ki, hogyan szavaztott);

2. Az a függvény, amely a φ-re leadott n darab szavazat függvényében megadja, hogy φ el van-e fogadva az $F(\Phi)$ összesített vélemény-halmazban, *ugyanaz* a függvény *minden* φ napiredni pont esetén.

A szisztematicitás fetétel szükségességéről (és lehetséges gyengítéseiről), valamint elhagyásának következményeiről a 6. fejezetben lesz szó részletesebben. Érdemes megjegyezni, hogy erre a feltételre úgy is tekinthetünk mint egy *monotonitási* tulajdonságra. Ha a fent említett 2-es feltételt elhagyjuk (amit megtehetünk, mint később látni fogjuk) akkor úgy gondolhatunk erre a tulajdonságra, mint ami azt mondja ki, hogy ha állítások egy A halmazával kapcsolatban született egy kollektív döntés, akkor – feltéve, hogy semelyik individuum nem változtatja meg a véleményét az A-beli állításokról – akármilyen A-nál bővebb B halmazra összegezzük is a véleményeket, az A-beli állítások elfogadása vagy elutasítása nem változik. Formálisan:

$$\forall A : \forall B\, (A \subseteq B) : \forall \Phi^B\, (\Phi^A \leq \Phi^B) : \forall \varphi \in A : \varphi \in F(\Phi^A) \leftrightarrow \varphi \in F(\Phi^B), \qquad (5)$$

ahol $\Phi^A \leq \Phi^B$ azt a tulajdonságot rövidíti, hogy $\forall i \in N : \Phi_i^A \subseteq \Phi_i^B$. Annak indoklásaként, hogy miért igaz ez az átfogalmazás a következőket érdemes meggondolni:

1. Ha F minden állítást külön-külön összegez (mint, ahogyan azt a szisztematicitás 1-es feltétele megköveteli) akkor könnyű látni, hogy az kielégíti a monotonitás tulajdonságot is. Ha felveszünk egy új propozíciót a napirendbe, annak bekerülése a kollektív vélemény-halmazba csak az erre a konkrét állításra leadott szavazatoktól függ majd, s nem befolyásolja a többi (korábban felvett) állítás elfogadását vagy elutasítását.

2. Az ellenkező irány belátásához: ha feltesszük, hogy F monoton, akkor az kénytelen minden állításra külön-külön véleményt összegezni, mivel a kollektív véleményt a monotonitás miatt inkrementálisan is számolhatjuk: először kiindulunk egy egyetlen állítást tartalmazó vélemény-halmazból, arra kiszámoljuk a kollektív döntést; ezután hozzáveszünk még egy állítást, amellyel kapcsolatban hozott döntés már nem befolyásolhatja a korábbi döntést, és így tovább (indukcióval). Mivel a napirendben szereplő állításokat tetszőleges sorrendben tekinthetjük, ezért a korábban hozzávett állítások sem befolyásolhatják az újonann felvett állítás elfogadását vagy elutasítását.

Egy példaként tekintsük a többségi szavazást, amely a jelenlegi modellünkben a következőképpen definiálható (az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy n páratlan):

$$\forall\, \Phi \in D_F : \forall\, \phi \in X : \phi \in F(\Phi) \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \delta_i(\phi) > \frac{n}{2} \qquad (6)$$

Nyilvánvaló, hogy a többségi szavazás kielégíti az univerzalitási, az anonimitási és szisztematicitási feltételeket. A diszkurzív dilemma mutatja továbbá, hogy a többségi szavazás nem racionális, abban az értelemben, hogy egy racionális véleményprofilból nem mindig állít elő racionális vélemény-halmazt. A List-Pettit tétel azt mondja ki, hogy ez nem kizárólag a többségi szavazás tulajdonsága.

5.3. A lehetetlenségi tétel és bizonyítása

A fenti definíciók birtokában már kimondható a List-Pettit tétel [15], [4]:

5.1. Tétel (List-Pettit 2002). *Egy nem triviális-módon összefüggő napirend esetén nem létezik olyan véleményösszegző függvény, amely kielégíti az univerzális értelmezési tartomány, anomimitás és szisztematicitás feltételeket, és amely minden lehetséges racionális vélemény-profilt racionális vélemény-halmazzá összegez.*

Bizonyítás: most vázlatosan ismertetjük a List-Pettit tétel bizonyításának menetét, azonban – az egyszerűség és tömörség kedvéért – csak arra az esetere korlátozódva, amikor $\{p, q, p \wedge q\} \subset X$. Első lépésként azt figyelhetjük meg, hogy az anonimitási feltétel és a szisztematicitási feltétel ekvivalens alakjából következik, hogy akármilyen $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \{0,1\}^n$ vektorokra teljesül, hogy $f(a_1, \ldots, a_n) = f(b_1, \ldots, b_n)$ akkor és csak akkor, ha ugyanannyian adtak le igenlő szavazatot, azaz ha $|\{i \in N \mid a_i = 1\}| = |\{i \in N \mid b_i = 1\}|$. Definiáljuk $N_\phi = \{i \in N \mid \phi \in \Phi_i\}$ minden $\phi \in X$-re. Ekkor, bármely két ϕ és ψ formulára ha teljesül, hogy $|N_\phi| = |N_\psi|$ akkor $\phi \in F(\Phi)$ akkor és csak akkor ha $\psi \in F(\Phi)$. Tekintsük a következő táblázattal definiált racionlális vélemény-profilokat:

	$\delta(p)$	$\delta(q)$	$\delta(p \wedge q)$	$\delta(\neg(p \wedge q))$
$i = 1$	1	1	1	0
$i = 2$	1	0	0	1
$i = 3$	0	1	0	1
$i > 3$ és i páros	1	1	1	0
$i > 3$ és i páratlan	0	0	0	1

Elsőként vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor n páros. Ekkor, a fent definiált táblázatból kiolvashatjuk, hogy tetszőleges páros n esetén $|N_{p\wedge q}| = |N_{\neg(p\wedge q)}|$, tehát – az első szakaszban tett észrevételeket felhasználva – az összegzőfüggvénynek teljesíteni kell, hogy $p \wedge q \in F(\Phi)$ akkor és csak akkor, ha $\neg(p \wedge q) \in F(\Phi)$, ami nyilvánvalóan nem racionális kollektív összegzett véleményhez vezet.

Második esetként tegyük fel, hogy n páratlan. Ekkor, ismét a fenti táblázattal adott példát használva (amit azért írhattunk fel tetszőlegesen, mert univerzális az összegzőfüggvény értelmezési tartománya) láthatjuk, hogy $|N_p| = |N_q| = |N_{\neg(p\wedge q)}|$, tehát vagy mind p-nek q-nak és $\neg(p\wedge q)$-nak benne kell lennie az összegzett véleményben, vagy egyiknek sem szabad benne lennie. Ha p is és q is benne van $F(\Phi)$-ben, akkor nyilván a deduktív zártság miatt $p \wedge q$-nak is benne kell lennie, ami azonban ellentmond a konzisztencia feltételnek, ugyanis a kollektív véleménynek $\neg(p \wedge q)$-t is tartalmaznia kell. Ha sem p sem q nincs benne $F(\Phi)$-ben, akkor – szintén a konzisztencia feltételből – $\neg p$ és $\neg q$-nak kell benne lennie, valamint mivel $\neg(p \wedge q)$ sem lehet benne, ezért $p \wedge q$-nak kell szerepelni. Azonban $\neg p$, $\neg q$ és $p \wedge q$ nem lehetnek egyszerre benne az összegzett vélemény-halmazban, mivel ez sérti a megkövetelt racionalitási feltételeket. Ebben az esetben is irracionális összegzett véleményhez jutottunk, így a téltelt bebizonyítottuk. $\square$

6. A feltételek gyengíthetősége

A következőkben röviden megvizsgáljuk, hogy milyen kibúvók kínálkoznak az „igazságos" véleményösszegzés számára, azaz milyen módon lehetne gyengíteni a véleményösszegző függvénytől megkövetelt tulajdonságokat úgy, hogy annak racionális és demokratikus volta megmaradjon, de ne álljanak elő paradoxonok.

Először, vegyük észre, hogy annak megkövetelése, hogy minden individuális vélemény-halmaz legyen racionális, nem gyengíti inkább erősíti a tételt. Ha megengednénk azt, hogy a szavazók irracionális véleménnyel is rendelkezhetnek, akkor az még tovább rontana a véleményösszegzés irracionalitásán. A List-Pettit tétel meglepő volta éppen abból fakad, hogy még ha szigorúan racionális volt is minden individuum álláspontja, nem tudunk olyan univerzális véleményösszegző függvényt készíteni, amelyik mindig racionális kimenetet eredményez.

Az sem egy hiányossága a List-Pettit tételnek, hogy a napirendnek propizícionális logikával leírható állításokból kell állnia, ugyanis ha még ezt a nagyon egyszerű, „nulladrendű" logikát alkalmazva is előáll a lehetetlenségi tétel, akkor a helyzet magasabb rendű logikákat használva még rosszabb lesz (de jobb biztos nem, mivel például a propozícionális kalkulus valódi részhalmaza a predikátum kalkulusnak).

6.1. A értelmezési tartomány leszűkítése

Első lépésben megpróbálhatjuk gyengíteni az *univerzális értelmezési tartomány* feltételt úgy, hogy a csak olyan vélemény-profilokat engedjünk meg, amelyeket garantáltan lehet racionálisan összegezni. Ilyen halmaz biztos, hogy létezik: ha ugyanis minden individuum csak kétfajta variációból választhatna (tehát csak kétfajta racionális vélemény lenne megengedett), akkor garantálva lenne, hogy mindig racionális lesz a közösségi döntés (gondoljunk például a May tételre). Azonban, ennek a tulajdonságnak a gyengítése három szempontból nem megfelelő: (1) nem elfogadható, hogy bizonyos racionális vélemény-profilokra ne tudjunk véleményt összegezni és így korlátozzuk a szavazók véleménynyilvánítási szabadságát. Másrészt, (2) a leszűkítés nem egyértelműen meghatározott. Pontosabban, ha $R \subset \mathcal{P}(X)$ jelöli a napirend racionális részhalmazainak halmazát, akkor több olyan $B \subseteq R$ halmaz létezhet, amelyik biztonságos, azaz amelyikre $\exists F : \forall \Phi \in B^n : F(\Phi) \in R$. Még ha csak a maximális elemszámú biztonságos halmazokat tekintjük is, a közülük való választás nem egyszerű. (3) Válasszunk ki egy maximális elemszámú B halmazt, amelyik biztonságos. Ekkor, általában $|B| \ll |R \setminus B|$, ahol „$\setminus$" halmaz kivonást, „$|\cdot|$" halmaz számosságot, „$\ll$" pedig a „sokkal kisebb" relációt jelöli.

Az a sejtés fogalmazható meg, hogy a napirend számosságának növekedésével, a napirend racionális részhalmazainak halmazai között a biztonságos és a nem-biztonságos halmazoknak az aránya konvergál nullához. Ezt a sejtést formálisan nem könnyű leírni, ugyanis a racionális és a biztonságos részhalmazok száma erősen függ a napirendtől és a véleményösszegző függvénytől. Célszerű áttérni egy bináris mátrix reprezentációra, ahol a racionális választások halmazának egy bináris mátrix felel meg, amely tulajdonképpen a napirendi pontok között fennálló logikai kapcsolatokat kódolja. A racionalitási mátrixnak minden oszlopa a napirend egy állításához, minden sora pedig egy lehetséges racionális véleményhez tartozik. Ennek a mátrixnak a sorai közül kell kitörölni néhányat, hogy biztonságos mátrixokhoz jussunk, ahol a „biztonságos" természetesen véleményösszegző függvény relatív. Számítógépes szimuláció segítségével végzett kísérletek azt látszanak alátámasztani, – legalábbis a többségi szavazás esetén – hogy a $|B| : |R \setminus B|$ arány rendkívül gyorsan tart a nullához. Következésképp, a megengedett bemenetek egy biztonságos halmazra korlátozásával elfogadhatatlanul erősen leszűkítenénk a választható vélemény-összességeket.

6.2. Az anonimitási feltétel gyengítése

Megpróbálhatjuk gyengíteni az *anonimitási* feltételt, és csak azt megkövetelni, hogy a szavazás ne legyen diktatórikus. Az i individuum diktatúrájáról akkor beszélünk, ha az összegzéshez használt F függvény minden $\langle \Phi_1, \ldots, \Phi_n \rangle = \Phi \in D_F$ lehetséges vélemény-profilra $F(\Phi) = \Phi_i$ adja eredményül. Sajnos, az anonimitási feltétel diktátor-mentességre gyengítése nem segít a paradoxonok kiszűrésében, mint azt a List-Pettit tétel Pauly és van Hees által bebizonyított általánosítása mutatja [19]:

6.1. Tétel (Pauly-van Hees 2003). *Egy véleményösszegző függvény, amely kielégíti az univerzális értelmezési tartomány és a szisztematicitás feltételeket, akkor és csak akkor összegez racionális vélemény-profilokat racionális kollektív véleményhalmazzá, ha diktatúra valamely $i \in N$ individuumra.*

Mivel a diktátor-mentességnél jobban nem célszerű gyengíteni ezt az igazságossági feltételt, ezért ezen az úton sem sikerült elkerülnünk a potenciálisan irracionális közösségi döntések veszélyét. Érdemes megjegyezni, hogy már a diktátor-mentesség is bizonyos értelemben túl elnéző, mivel megenged olyan véleményösszegző függvényeket is, amelyekben például bizonyos szavazók véleménye egyáltalán nem érvényesül, másoké pedig különböző súllyal, különböző mértékben.

6.3. A szisztematicitási feltétel gyengítése

A *szisztematicitás* feltétel – mint láttuk – kétféle megszorítást takar, amelyeket külön-külön is megpróbálhatunk gyengíteni. Dietrich eredményeiből következik [4], hogy nem segít ha a különböző formulákra leadott szavazatok összegzéséhez különböző függvények használatát is megengedjük, a lehetetlenségi tétel ugyanúgy érvényben marad. Az a feltétel, hogy minden állításra külön szavazás történjen s ezen szavazás kimenetele ne függjön attól, hogy mik voltak a többi állításra leadott szavazatok, természetesnek tűnik. Érvelhetünk úgy, hogy nem volna elfogadható ha egy napirendi pontra leadott szavazatok összegzése attól is függne, hogy mi a napirend. Azonban, ha ragaszkodunk a véleménynyilvánítási szabadsághoz (univerzális értelmezési tartomány) és egy gyenge értelemben vett igazságossághoz (diktátormentesség) valamint ahhoz, hogy a kollektív döntés mindig racionális legyen, akkor egyedül a szisztematicitás feltétel marad, amelyet fel tudunk adni. És ez az út, amelynek segítségével kibújhatunk az irracionalitás fenyegető veszélye alól. Ha a szisztematicitás feltételt elvetjük, akkor már alkalmazhatóvá válnak a premissza-alapú véleményösszegző eljárások is, amelyek mindig racionális eredményt adnak.

A premissza-alapú megközelítések további előnye, hogy bizonyos esetekben garantálják a „jó" döntést. Ha például olyan kérdésekben döntünk, amikor van értelme arról beszélni, hogy jó döntés született-e (például, egy szakértői csoport szavaz egy tudományos kérdésről, például arról, hogy van-e globális felmelegedés), akkor a premissza alapú megközelítés annál jobb eredményt ad, minél több individuum szavaz, feltéve, hogy minden szavazó nagyobb, mint $1/2$ valószínűséggel találja el a helyes megoldást [14]. Ez a szép tulajdonság más véleményösszegző függvényekre – például a konklúzió-alapú módszerekre – már nem minden esetben áll fenn.

7. A List-Pettit tétel jelentősége

Ebben a fejezetben a List-Pettit tétel elméleti és gyakorlati jelentőségével foglalkozunk. Először azt fogjuk megvizsgálni, hogy milyen kapcsolatban van a List-Pettit tétel és a társadalmi választások elméletében klasszikusnak számító Arrow tétel. Ezután, a tétel társadalomfilozófiai következményeinek illusztrációjaként ismertetjük az ún. *liberális-paradoxont*, amely azt hivatott bemutatni, hogy milyen inkonzisztenciák léphetnek fel egy szabad és demokratikus társadalomban. Végül, a tétel gyakorlati jelentőségének szemléltetéseként ismertetünk néhány olyan módszert, amellyekkel manipulálni lehet szavazások kimenetelét, például a napirend megfelelő megválasztásával vagy a szavazásra bocsájtás sorrendjének megváltoztatásával.

7.1. Összehasonlítás az Arrow tétellel

Bár az Arrow tétel különböző alternatívák preferencia-rendezéseinek összegzésével foglalkozik, a List-Pettit tétel pedig propíziciók halmazainak összegzésével, mégis természetesnek tűnik a kérdés, hogy mi a kapcsolat a két lehetetlenségi tétel között. Ha az alternatívák A halmaza véges, akkor viszonylag könnyű látni, hogy az Arrow tétel a List-Pettit tétel egy speciális esete (pontosabban a Pauly és van Hees féle általánosításé, mivel az eredeti List-Pettit tétel diktátor-mentesség helyett anonimitást követelt meg). Legyen $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ az alternatívák egy halmaza, ekkor minden $R \subseteq A \times A$ rendezés „lekódolható” propozícionális logikai állításokkal. Például, egy aRb állítás egy p_{ab} atomi formulával reprezentálható. A rendezés feltételei – tehát a reflexivitás, az anti-szimmetrikusság és a tranzitivitás – is leírhatóak propizícionális formulákkal, azonban – mivel kijelentéskalkulust használunk – nem alkalmazhatunk kvantifikációt, ezért minden alternatíva lehetőségre külön-külön kell megkövetelni ezeket a tulajdonságokat. A tranzitivitás lekódolásához: ha $a, b, c \in A$ akkor lesz egy olyan formula az X napirendben, hogy $p_{ab} \wedge p_{bc} \rightarrow p_{ac}$. Az anti-szimmetrikusság leírásához: minden $a \neq b$ lehetőségre egy $p_{ab} \equiv \neg p_{ba}$ szükséges. A reflexivitás lekódolása felesleges, mivel ez nem jelent valódi választási alternatívát az individuumok számára: az aRa tulajdonság akármilyen R rendezésre teljesülni fog. Azonban, elméletileg a reflexivitás is leírható minden elemre egy p_{aa} formulával.

Ugyan gyakorlati szempontból kielégítőnek látszik véges alternatíva-halmazok vizsgálata, azonban felmerülhet a kérdés, hogy mi a helyzet végtelen halmazok esetén. List és Pettit a két lehetetlenségi tétel összehasonlításával foglalkozó cikkükben [16] megmutatták, hogy ilyen esetekre is kiterjeszthető a List-Pettit tétel.

Tehát az Arrow tételben szereplő preferencia-rendezések leírhatóak a List-Pettit tételben szereplő propozíciók halmazaival. Nem lehet-e esetleg a List-Pettit téltelt is olyan formára hozni, hogy az Arrow tétel speciális esete legyen (ebben az esetben a két tétel ekvivalens lenne). Ugyan ezt a lehetőséget még szigorú / matematikai értelemben nem cáfolták, azonban a List-Pettit tétel átkódolása (nem feltétlenül lineáris) preferencia rendezésekké nem tűnik megvalósítható feladatnak. Ezzel kapcsolatban néhány átkódolási ötletet és elégtelenségük magyarázatát megtalálhatjuk a két lehetetlenségi tétel összehasonlításával foglalkozó cikkben [16].

7.2. A liberális paradoxon

A liberális paradoxont először Amartya Sen [22] fogalmazta meg 1970-ben, elsősorban az Arrow tétel kapcsán. A paradoxont és a hozzá kapcsolódó lehetetlenségi tételt később Dietrich és List általánosították [5] tetszőleges nem-triviálisan összefüggő propizícionális állításokból álló napirendhalmazokra. A paradoxon alapszituációja a következő: tegyük fel, hogy bizonyos kérdésekről nem a teljes közösség, hanem egyes emberek vagy szakértői csoportok döntenek. Például, egy szabad társadalomban vannak olyan kérdések, amelyekről – noha mindenki másnak is meg lehet a véleménye – csak az egyén saját maga dönt (pl., a gondolat vagy véleménynyilvánítási szabadság területére tartozó kérdésekben). Egy másik példa lehet amikor egy parlament vagy szervezet néhány albizottság vagy szakértői csoport körébe utal speciális döntéseket. Ugyanakkor, a mindenkit érintő kérdésekben kollektív döntést kell hozni. Egy nagyon gyenge megszorításnak tűnik, amelyet megkövetelünk a kollektív döntésektől az ún. „egyhangúsági elv” (*unanimity principle*), amely szerint ha egy közösség minden tagja *egyhangúan* egyetért egy kérdésben, akkor a kollektív döntésnek is az egyhangú véleményt kell követnie. A „liberális paradoxon” az a jelenség, hogy bizonyos körülmények között az egyhangúsági elv nem egyeztethető össze konziszetensen az egyéni (vagy csoportos) szabadságjokokkal. A liberális paradoxont először két egyszerű konkrét példán keresztül ismertetjük.

7.2.1. A szakértői jogok egy paradoxona

Tegyük fel, hogy egy szervezet a globális felmelegedést vizsgálja. A szakértők egy X csoportja a globális széndioxid kibocsájtást próbálja megmérni. Egy Y csoport pedig azt igyekszik megtudni (például környezeti modellek számítógépes szimulációjának segítségével), hogy mekkora CO_2 kibocsájtás vezet globális felmelegedéshez. A szervezet soron következő ülésén a következő napirendről akarnak dönteni:

p : a széndioxid kibocsájtás mértéke meghalad egy x küszöbértéket
q : globális felmelegedés lesz
$p \to q$: *ha* a CO_2 kibocsájtás meghaladja x-et, *akkor* globális felmelegedés lesz

A szervezet – mivel X tagjai mérték a CO_2 szintet – a p-ről való döntést kizárólag X hatáskörébe utalja. A $p \to q$-ról való döntést pedig az elméleti vizsgálatokat végző Y szakértőinek körébe. A globális felmelegedés tényéről – tehát q-ról – kollektív döntés születik. Ekkor, lehetséges, hogy a következő lesz a szavazás kimenetele:

	p	$p \to q$	q
X szakértők $\sim \Phi_1$	igen	(nem)	nem
Y szakértők $\sim \Phi_2$	(nem)	igen	nem
kollektív döntés $\sim$ F(Φ)	igen	igen	nem

A zárójelbe tett értékek csak vélemények, azok nem számítottak bele a kollektív döntésbe (mivel például a p-ről való döntés az X csoport hatáskörébe tartozik, ezért lett a kollektív döntés eredménye „igen” és az Y csoport véleménye nem lett figyelembe véve). Megfigyelhetjük, hogy ugyan minden szakértői csoport racionális véleménnyel rendelkezett és a globális felmelegedés tényéről – q-ról – való döntést *egyhangúan* hozták meg, az mégis ellentmondásban van a bizottság többi kérdésben hozott döntésével, ugyanis p és $p \to q$ elfogádása esetén q-nak is teljesülnie kell.

7.2.2. A szabadságjogok egy paradoxona

A most következő példa Amartya Sen eredeti liberális paradoxonának egy módosított változata. Tegyük fel, hogy adott egy két tagból álló közösség. A két ember L (Lewd) és P (Prude) mindegyikének birtokában van a „Lady Chatterley szeretője” című könyv egy példánya. Tekintsük a következő három állítást:

l : L olvassa a könyvet
p : P olvassa a könyvet
$l \to p$: *ha* L olvassa a könyvet, *akkor* P is olvassa azt

L szívesen olvassa a könyvet, de P-t a könyv megbotránkoztatja. L élvezete a könyv olvasása kapcsán azonban P bosszankodásától csak még jobban nő. P ugyan nem akarja elolvasni a könyvet, de mivel fél, hogy a könyv morálisan megrontja L-t, ezért ha L olvassa a könyvet, akkor ő is olvasni akarja, hogy tudatában legyen miféle veszélyeknek van L kitéve. A helyzet az, hogy L és P kollégiumi szobatársak és abban mindketten egyetértenek, hogy az, hogy ki olvassa a könyvet, az mindenkinek a saját egyéni döntése. Azonban – ugyan mindeketten más megfontolásból – egyhangúan megállapodnak egy olyan szabályban, hogy ha L olvassa a könyvet, akkor P-nek is olvasnia kell azt. A következő táblázat írja le a kialakult helyzetet:

	l	p	$l \to p$
L (Lewd)	igen	(igen)	igen
P (Prude)	(nem)	nem	igen
kollektív döntés	igen	nem	igen

Itt is, mint az előző szakértőkkel kapcsolatos példa esetében a zárójelbe tett vélemények nem számítottak bele a kollektív döntésbe. Megfigyelhetjük, hogy ebben a példában is a kollektív vélemény inkonzisztens, noha minden egyes egyén véleménye racionális volt és a mindkettejükre érvényes szabályt egyhangúan fogadták el.

7.2.3. Általános liberális paradoxon

Az előző példák rámutatnak, hogy bizonyos helyzetekben egyes emberekre vagy szakértői csoportokra bízni bizonyos döntéseket inkonzisztenciához vezethet, még olyan esetekben is, amikor a kollektív döntést egyhangúan hozták. Dietrich és List most következő tétele [5] általános formában tárgyalja ezt a jelenséget. Tekintsük a következő három tulajdonságot, amelyeket a véleményösszegző függvényektől elvárunk:

(UD) *Univerzális értelmezési tartomány* (Universal Domain): ez ugyanaz a feltétel, mint az eredeti List-Pettit tételnél, tehát a véleményösszegző függvénynek az összes lehetséges racionális vélemény-profilra tudnia kell eredményt számolni.

(MIR) *Minimális individuális jogok* (Minimal Individual Rights): létezik két individuum, akiknek kizárólagos döntésük van legalább egy propozícióval kapcsolatban. Akkor mondjuk, hogy egy $i \in N$ individuumnak kizárólagos döntése van egy $\varphi \in X$ propozícióval kapcsolatban, ha minden $\Phi \in D_F : \varphi \in \Phi_i \equiv \varphi \in F(\Phi)$. Másképp fogalmazva, i diktátor φ kérdésében, tehát F az ő döntésének projekciója.

(UP) *Egyhangúsági elv* (Unanimity Principle): Ha $\Phi = \langle \Phi_1, \ldots, \Phi_n \rangle$ egy vélemény-profil az F véleményösszegző függvény értelmezési tartományából, és egy $\varphi \in X$ propozícióra minden $i \in N$-re $\varphi \in \Phi_i$, akkor teljesülnie kell, hogy $\varphi \in F(\Phi)$.

7.1. Tétel (Dietrich-List 2004). *Egy nem triviális-módon összefüggő napirend esetén és az (UD), (MIR), (UP) feltételek teljesülése mellett nem létezik olyan véleményösszegző függvény, amelyik minden lehetséges racionális vélemény-profilt racionális kollektív vélemény-halmazzá összegez.*

Következésképp, egy közösség, amelyik minden lehetséges racionális vélemény-profil esetén tudni akar racionális kollektív döntést hozni, nem adhat kizárólagos jogokat bizonyos kérdésekben egyéneknek vagy szakértőknek az egyhangúsági elv egyidejű elfogadása mellett. Érdekesség, hogy a tétel akkor is érvényben marad, ha a racionalitási feltételek közül kivesszük a teljességet. Továbbá, ha *vétó-joggá* gyengítjük az egyének bizonyos kérdésekre vonatkozó kizárólagos jogát, akkor is fennáll ez a lehetetlenségi tétel [5]. Egy $i \in N$ individuum vétó-jogáról egy $\varphi \in X$ kérdéssel kapcsolatban akkor beszélünk, ha $\forall \Phi \in D_F : \varphi \notin \Phi_i \rightarrow \varphi \notin F(\Phi)$.

7.3. Napirend manipuláció

A List-Pettit féle véleményösszegzés keretrendszernek és a lehetetlenségi tételnek aktuálius, gyakorlati jelentősége is van. A segítségével elemezhetővé válnak összefüggő kérdésekben történő kollektív véleményalkotási szituációk és rávilágít néhány potenciális szavazás-manipuláció lehetőségre. Ezekre mutatnunk most néhány példát.

7.3.1. Logikai napirend manipuláció

Tekintsük a következő szituációt: adott egy ország, amely kormányának a közelgő kormányülésen a következő összefüggő kérdésekben kellene közös véleményt kialakítania (az alfejezet összes példája Dietrich-től [4] származik):

p :	megengedhető nagyobb költségvetési hiány
q :	az oktatási célokra szánt költségvetési támogatást növelni kellene
$p \rightarrow q$:	*ha* megengedhető nagyobb hiány, *akkor* többet kellene költeni oktatásra

Tegyük fel továbbá, hogy a kormány miniszterei három nagyjából ugyanakkora csoportba sorolhatóak, akiknek a véleményét a következő táblázat tartalmazza:

	p	q	$p \rightarrow q$
1. csoport (Φ_1)	igen	igen	igen
2. csoport (Φ_2)	igen	nem	nem
3. csoport (Φ_3)	nem	nem	igen

Tekintsük azt az esetet, amikor a kormány álláspontja, hogy a véleményeket többségi szavazással kell összegezni. Ez több manipulációs lehetőségre ad alkalmat. Nézzük először un. *általános napirend manipulációt.* Tegyük fel, hogy a napirend összeállítását végző csoport úgy gondolja, hogy többet kellene költeni oktatásra, s ezért úgy állítja össze a napirendet, hogy $X = \{p, p \rightarrow q, \perp\}$, ahol „$\perp$” a napirendi pontok negáltjait rövidíti, tehát „$\neg p$”-t és „$\neg(p \to q)$”-t. Ekkor, nyilván $F(\Phi) = \{p, p \to q\}$, s így $F(\Phi) \vdash q$, s a napirendet összeállító csoport elérte a célját, mert a szavazás után már nyugodtan lehet a kormány tagjainak többségi döntésére hivatkozni az oktatási támogatások növelésénél.

Egy lehetséges probléma, hogy az X napirendre leadott szavazatok nem feltétlenül határozzák meg q értékét. Például, ha $F(\Phi) = \{\neg p, p \to q\}$, akkor ebből sem q, sem $\neg q$ nem következik logikailag. Ez a probléma kiküszöbölhető, ha $X = \{p, p \leftrightarrow q, \perp\}$, amely minden lehetséges esetben meghatározza q értékét is. Ez a *logikai napirend manipuláció* egy példája. Általánosságban, logikai napirend manipulációnak nevezzük egy X napirend kicserélését egy X' napirendre, ha $\overline{X'} = \overline{X}$, ahol $\overline{X}$ az összes olyan ϕ állítást tartalmazza, amelyik minden racionális Φ_i állításhalmazból következik.

7.3.2. Manipuláció a szavazás sorrendjével

A manipulációnak egy változata, amikor az állítások szavazásra bocsájtásának sorrendjével befolyásolják a végeredményt. Tekintsünk egy újabb parlamenti példát: adott három – nagyjából ugyanannyi szavazattal rendelkező – párt (A, B és C) amelyeknek az alábbi állításokról kellene szavaznia:

p_1 :	az egészségügynek nagyobb forrásokat kellene biztosítani
p_2 :	a hadügynek több költségvetési támogatást kellene juttatni
p_3 :	a kultúrára és az oktatásra több pénzt kellene fordítani
q :	adót kellene emelni
$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \to q$:	*ha* mindenre több pénzt fordítunk, *akkor* adót kell emelni

A pártok (racionális) álláspontjait a következő táblázat mutatja:

	p_1	p_2	p_3	q	$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \to q$
A párt (Φ_1)	igen	igen	nem	nem	igen
B párt (Φ_2)	igen	nem	igen	nem	igen
C párt (Φ_3)	nem	igen	igen	nem	igen

Mint látható, egyik párt sem akar adót emelni, azonban eltérő véleményen vannak arról, hogy milyen területeknek kellene több költségvetési támogatást kapniuk. Tegyük fel, hogy a pártok álláspontja ismert (például a nyilatkozataikból világossá vált), s így tudható, hogy hogyan fognak az egyes kérdésekben szavazni, valamint az egyes napirendi pontokról minősített többség dönt. Tegyük fel azt is, hogy a pártok következetesek, s így irracionális pontokat nem szavaznak meg. Ekkor, ha egy a B párt álláspontján lévő csoport van abban a helyzetben, hogy a szavazásra bocsájtás sorrendjét meghatározza, választhatja a következő – manipulatív – sorrendet: q, $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \rightarrow q$, p_1, p_3, p_2. Az első négy napirendi pontra mindenki úgy szavaz, ahogy tervezte, s így az eredmény: q : nem, $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \rightarrow q$: igen, p_1 : igen, p_3 : igen. Azonban, az utolsó napirendi pontra (az előzőleg a többség által elfogadott állítások miatt) már mindegyik párt kénytelen nem-el szavazni, különben el kellene ismernie, hogy adóemelést szeretne, s így ellentmondásba keveredne önmagával. A végeredmény pontosan a B párt álláspontját tükrözi.

8. Záró megjegyzések

A társadalomfilozófia számára kiemelkedő fontosságú a különböző egyéni és közösségi döntési helyzetek következetes vizsgálata. Például, egy modern társadalmi szerződéselmélet nem nélkülözheti a kollektív döntések, szavazások alapos elemzését. A XX. század második felében több klasszikus formális eredmény született a közösségi döntésekről – például a May tétel és az Arrow tétel – majd a társadalomfilozófián belül is egyre erősebbé vált a döntési szituációk formális vizsgálata (például, játékelméleti alapokon), amely vizsgálatok a racionális döntések elmélete tárgykörébe sorolhatóak. Valószínűsíthető, hogy az analitikus, formális megközelítések egyre nagyobb szerephez jutnak majd a társadalomfilozófiában, szociológiában mivel segítségükkel hatékonyan elemezhetőek társadalmi, politikai és gazdasági jelenségek, feltéve, hogy egy olyan álláspontra helyezkedük, hogy az önérdek érvényesítő, racionális cselekvést a jelenségek megértése szemponjából elsődlegesnek tekintjük.

A dolgozat fő célja az volt, hogy a közösségi döntések potenciális irracionalitásával kapcsolatos klasszikus és frissebb analitikus irodalomból bemutasson néhány jelentősebb eredményt, mint amilyen az Arrow tétel (1951), valamint a List-Pettit tétel (2002) és ennek különböző általánosításai, például Pauly és van Hees tétele (2003) vagy a Dietrich-List tétel (2004) a liberális paradoxon általános változatáról.

A List-Pettit tétel különböző változatainak alapfeltevése, hogy egy közösség nem egyetlen, hanem számos, logikailag (nem triviális-módon) összefüggő kérdésről akar megegyezésre jutni. Ez, természetesen, nem egy irreális feltevés, ugyanis például egy parlamenti vagy vállalati ülés alkalmával több olyan kérdés előkerülhet, amelyek valamilyen módon összefüggnek egymással. A probléma, amivel a közösségnek szembe kell néznie, hogy ha nem akarják korlátozni az egyének racionális véleményét (univerzális értelmezési tartomány), bizonyos értelemben igazságosan akarnak dönteni (anonimitás vagy diktátor-mentesség) és minden állításról egymástól függetlenül akarnak megegyezni (szisztematicitás vagy monotonitás), akkor nem fognak tudni hatékonyan véleményt összegezni, a kollektív döntés potenciálisan irracionális lesz; amin jelen esetben az elfogadott állítások lehetséges inkonzisztenciáját kell érteni.

Hogyan lehetne elkerülni a közösségi döntéshozás irracionalitását? Természetesnek tűnik, hogy a véleménynyilvánítási szabadsághoz és az igazságossághoz (például ahhoz, hogy ne legyen diktátor) ragaszkodjunk. A szisztematicitási feltétel tűnik a leggyengébb láncszemnek, amelyet fel lehet áldozni a racionális kollektív döntések érdekében. Ha nem ragaszkodunk a szisztematicitáshoz, akkor alkalmazhatóvá válnak például a premissza-alapú módszerek, amelyek minden esetben garantálják a racionalitást. Ebben az interpretációban a List-Pettit tétel társadalomfilozófiai következménye, hogy a kollektív racionalitás érdekében le kell mondanunk a szavazás kompozícionalitásáról, tehát arról, hogy minden kérdésben egymástól függetlenül döntsünk és az összes kérdésben való megállapodás az egyes kérdésekben hozott döntések aggregációja. Egy holisztikus megoldás felé mutat tehát az eredmény, ahol nem lehet egyes állításokról kontextusuk és következményeik nélkül dönteni.

Jelölések

Véleményösszegzéssel kapcsolatos jelölések

N	A döntésben résztvevő individuumok halmaza
n	A döntésben résztvevő individuumok száma
X	A napirend, a választható lehetőségek halmaza
$\overline{X}$	Az X halmaz lezártja, a belőle következő állítások összessége
$\perp$	A napirendi pontok negáltjainak rövidítése
Φ_i	Az i-edik szavazó által elfogadott állítások halmaza
Φ	Az összes szavazó véleményhalmazait tartalmazó vektor
F	A véleményösszegző függvény
f	A véleményösszegző függvény bináris változata
D_F	Az F függvény értelmezési tartománya
i, j	individuumokat jelölő változók

Halmazokkal, relációkkal kapcsolatos jelölések

R	Relációt jelölő változtotó
xRy	Az x és az y elemek R relációban vannak
σ	Permutációt (bijekciót) jelölő függvény
δ	Indikátor függvény; 1 ha az argumentuma igaz, 0 különben
$\mathcal{P}$	Hatványhalmaz képzés
$\times$	Descarters vagy direkt szorzat
$\langle\cdot\rangle$	Rendezett n-es („vektor”) megadása
A^k	Az A halmaz önmagával vett k-szoros direkt szorzata
a_k	Egy a rendezett n-es k-adik eleme
$\{\cdot\}$	Halmaz megadása elemeivel
$\lvert\cdot\rvert$	Halmaz számossága
$\subset, \subseteq$	Szigorú, nem-szigorú részhalmaz reláció
$\in, \notin$	Halmaz eleme, nem-eleme reláció
$\setminus$	Halmaz kivonás
$\rightarrow$	Leképezés jele

Logikai jelölések

p, q	Atomi formulákat jelölő változók
ϕ, φ	Tetszőleges formulákat jelölő változók
$\wedge$	Logikai „és”
$\vee$	Logikai „vagy”
$\neg$	Logikai „nem”
$\sim$	Logikai „nem”, kettős tagadás kiiktatásával
$\rightarrow$	Logikai „materiális implikáció”
$\leftrightarrow$	Logikai „ekvivalencia”
$\equiv$	Logikai „ekvivalencia”
$\exists$	Logikai „létezik” kvantor
$\forall$	Logikai „minden” kvantor
$\vdash$	Logikai „levezethetőség”

Egyéb jelölések

$\sum$	Több elem összege
$\ll$	„Sokkal kisebb” reláció

Hivatkozások

[1] Arrow, K.: *Social Choice and Individual Values* (1951/1963), New York: Wiley

[2] Csontos, L. (szerk.): A racionális döntések elmélete, *Osiris Kiadó – Láthatatlan Kollégium*, Budapest (1998)

[3] D'Agostino, F.: Contemporary Approaches to the Social Contract, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (2003), article available on-line at http://plato.stanford.edu/archives/sum2003/entries/contractarianism-contemporary/

[4] Dietrich, F.: Judgment Aggregation: (Im)Possiblity Theorems, *Journal of Economic Theory* **126** (megjelenés alatt, 2005)

[5] Dietrich, F., and C. List: A Liberal Paradox for Judgment Aggregation, *Economics Working Paper Archive* at WUSTL (2004) paper available on-line at http://ideas.repec.org/p/wpa/wuwppe/0405003.html

[6] Elster, J.: A társadalom fogaskerekei [1989], *Osiris Kiadó*, Budapest (1997)

[7] Feinberg, J.: Társadalomfilozófia [1973], *Osiris Kiadó*, Budapest (1999)

[8] Goodin, R. E. and List, C.: A Conditional Defense of Plurality Rule: Generalizing May's Theorem in a Restricted Informational Environment, *Working Paper*, Department of Government, London School of Economics (2005)

[9] Hobbes, T.: Leviatán [1651], *Kossuth Kiadó*, Budapest (1999)

[10] Huoranszki, F. (szerk.): Modern politikai filozófia, *Osiris Kiadó – Láthatatlan Kollégium*, Budapest (1998)

[11] Kemény, J.: Mathematics Without Numbers, *Daedalus* **88** (1959) 571–591

[12] Kornhauser, L. A. and Sager, L. G.: Unpacking the Court, *Yale Law Journal* **82** (1986)

[13] Kornhauser, L. A.: Modelling Collegial Courts. II. Legal Doctrine, *Journal of Law, Economics and Organization* **8** (1992) 441–470

[14] List, C.: The Probability of Inconsistencies in Complex Collective Decisions, *Social Choice and Welfare* **24** (2004) 3–32

[15] List, C. and Pettit, P.: Aggregating Sets of Judgments: An Impossibility Result, *Economics and Philosophy* **18** (2002) 89–110

[16] List, C. and Pettit, P.: Aggregating Sets of Judgments: Two Impossibility Results Compared, *Synthese* **140** (2004) 207–235

[17] Ludassy, M.: Elhiszem, mert ésszerű, *Osiris Kiadó*, Budapest (1999)

[18] May, K. O.: A Set of Independent Necessary and Sufficient Conditions for Simple Majority Decision, *Econometrica* **20** (1952) 680–684

[19] Pauly, M. and van Hees, M.: Some General Results on the Aggregation of Individual Judgments, *Working Paper*, Department of Computer Science, University of Liverpool (2003)

[20] Rawls, J.: Az igazságosság elmélete [1971], *Osiris Kiadó*, Budapest (1997)

[21] Rousseau, J.-J.: A társadalmi szerződésről, avagy a politikai jog elvei [1762], *Klett Kiadó*, Budapest (1997)

[22] Sen, A. K.: The Impossibility of Paretian Liberal, *Journal of Political Economy* **78** 152–157 (1970)