Miért nem vagyok intuicionista?

Csáji Balázs Csanád

HALSZEM (előadás vázlat), 2004. október 15.

I. Bevezetés

Dummett nyomán *realistának* hívom azon *szemantikai* álláspontokat, melyek szerint kijelentések egy adott osztálya kapcsolatban van egy olyan valósággal, amely a tudásunktól függetlenül létezik, oly módon, hogy ez a valóság igazzá vagy hamissá teszi állításainkat az osztályból, függetlenül attól, hogy mi ismerjük-e vagy egyáltalán képesek vagyunk megismerni ezeket az igazságértékeket. Hasonlóan, *anti-realistának* hívom azon álláspontokat, amelyek tagadják tudásunktól független igazságértékek létezését az adott osztállyal kapcsolatban.

Az *intuicionizums* és a *konstruktivizmus* anti-realista álláspontok a matematikai állításokról.

II. Történeti áttekintés

Több anti-realista matematikai elmélet gyökerei *Kantig* nyúlnak vissza (pl.: Brouwer), akinek jellegzetes matematika felfogása szerint (T.É.K.) minden matematikai állítás *szintetikus a priori* természetű (ellentétben mondjuk *G. W. Leibniz* nézeteivel). Kant szerint a matematika bázisa a tér és az idő tiszta belső (az érzéki tapasztalást megelőző) szemlélete, intuíciója. A matematika szintetikus jellege abban nyilvánul meg, hogy a matematikai tételek gondolati konstrukciók eredményei.

Kronecker volt az első matematikus aki már konstrukvistának tekinthető. Híres mondása: *„Az egész számokat Isten teremtette, minden más emberi alkotás.”*. Körvonalazott egy „aritmetizálási” programot az algebra és az analízis számokkal való megalapozására (később: Bishop). Csak azokat a definíciókat tekintette elfogadhatónak, amelyeket *véges* lépésben ellenőrizni lehet. Ez vezette el a *tiszta* egsziztenciális bizonyítások kritikájához.

Később a francia pre-intuicionisták fejtettek ki többékevésbe konstruktivista nézeteket. A legfontosabb alakjai ezen irányvonalnak: *Baire*, *Borel*, *Lebesgue*, *Lusin* és *Poincaré*. Támadták a *Zermelo-Fraenkel*-féle halmazelméletet megalapozó axiómarendszer *kiválasztási axiómáját* és a „logicizmust”: Poincaré gyakran idézett mondása: *„Egy szillogizmus nem tud semmilyen esszenciálisan újat tanítani nekünk.”* (1902). Szerintük a matematikában többre van szükségünk mint logikára: intuíciókra.

Az intuicionizmus első precíz megfogalmazása *L. E. J. Brouwer* holland matematikus nevéhez fűződik. Brouwer szerint a matematika az elme belső szabad alkotása és független mindenféle nyelvtől vagy platonikus valóságtól. Szerinte a matematika nem függ a logikától és a logika a matematika része, valamint a matematikát nem lehet axiomatikus módon megalapozni. Elutasította a Hilbert féle formalizmust és a Cantor féle halmazelméletet. A logika számára csak egy megbízhatatlan eszköz a kommunikációra. A matematikai gondolkodás – Brouwer szerint – matematikai struktúrák megalkotásából áll, és a szillogizmusokhoz hasonló logikai struktúrák megjelenését csak a szabály alkalmazása közben végzett matematikai konstrukció igazolja. A logikát alkalmazott matematikának tekintette és empirikus tudománynak. Szerinte nem létezik meghatározott matematikai igazság a gondolkodáson kívül, és egy állítás csak akkor lesz igaz ha a szubjektum megtapasztalta az igazságát (amit a megfelelő mentális konstrukció véghezvitelével tud megtenni). Hasonlóképpen, egy állítás csak akkor lesz hamis, ha a szubjektum megtapasztalta a hamisságát (mivel felismerte, hogy egy meghatározott logikai konstrukció nem lehetséges). Tehát Brouwer szerint nincsenek nem megtapasztalt (tudásunktól független) igazságok. Ezen nézetei a konstruktív matematika megalkotásához vezettek.

A konstruktivizmus egy még radikálisabb ága a *finitizmus.* A finitisták, például *Skolem* és *Goodstein*, kritizákták az absztrakt fogalmak használatát a matematikában és egy nagyon korlátozott konstruktív matematika bevezetését javasolták, amelyben csak szigorúan véges matematikai objektumok használata megengedett (mint amilyen egy természetes szám) és ezeken az objektumokon csak konkrét (effektív) kombinatorikus műveleteket szabad értelmezni (pl. amilyen egy szorzótábla).

A konstruktív rekurzív matematika főleg *Markov* nevéhez fűződik, és az algoritmusok vagy rekurzív függvények elméletén nyugszik. Markov konstruktív matematikájának alapjai: (m1) a matematika objektumai különböző abc-k fölötti szavak; (m2) realizálható absztrakció megengedett a matematikában, de nem megengedhetőek az aktuális végtelent használó absztrakciók. Elmélete egy rekurzív matematika intuicionista logikai alapokon. Azonban Markov szigorúbb mint az intuicionisták, ugyanis csak olyan kiválasztási sorozatokat enged meg, amelyek egy véges algoritmus által előre adottak. A Markov-elvet viszont az intuicionisták utasították el.

III. A klasszikus és a konstruktivista matematika/logika viszonya

Formális intuicinista rendszereket először Brouwer tanítványa *A. Heyting* dolgozott ki, például a formális intuicionista propozicionális és predikátum logikát valamint az intuicionista aritmetikát (Peano nyomán).

Az intuicionista logika jellegzetes vonása, hogy az *alternációt* és az *egzisztenciális* kvantor szigorúbb módon van értelmezve. Az $\vdash A \vee B$ csak akkor teljesül, ha $\vdash A$ és $\vdash B$ közül legalább az egyik teljesül, így nem lesz érvényes a *kizárt harmadik elve.* Az *egzisztenciális* kvantor tekintetében pedig: a „létezik” jelentését azonosítják a „tudunk konstruálni”-val. Tehát $\vdash \exists x F(x)$ csak akkor teljesül, ha van olyan t terminus, amelyre $\vdash F(t)$.

Egy alapvető eredmény az intuicionista logikával kapcsolatban, hogy a klasszikus és intuicionista (propozicionális- és predikátum-) logika ekvikonzisztens. A propozicionális logikára ezt Glivenko bizonyította be először 1929-ben. A klasszikus propozicionális-kalkulust jelöljük PC-vel míg az intuicionista megfelelőjét IPC-vel. Glivenko bebizonyította, hogy egy A formulára PC-ben $\vdash A$ akkor és csak akkor, ha IPC-ben $\vdash \neg\neg A$. (Sőt: PC-ben $\vdash \neg A$ akkor és csak akkor, ha IPC-ben $\vdash \neg A$.)

A predikátum-kalkulusok (QC, IQC) esetére az ekvikonzisztenciát Gödel és Gentzen bizonyították be (függetlenül). Tételük szerint egy L nyelv minden A formulájára megadható egy olyan $g(A)$ formula (A „negatív fordítása”), hogy a következő három állítás teljesül:

(k1) QC-ben $\vdash A \leftrightarrow g(A)$;

(k2) IQC-ben $\vdash g(A) \leftrightarrow \neg\neg g(A)$;

(k3) Ha QC-ben $\vdash A$, akkor IQC-ben $\vdash g(A)$.

Interpretációt (szemantikát) intuicionista logikához Klenee, Beth, Aczél és Kripke is adtak. A Kripke féle lehetséges világ szemantikára (1965) az intuicionista predikátum-logika *helyes* és *teljes*.

Az intuicionista logikára hatékony matematika építhető, amelyre példa *Bishop* munkája: „A konstruktív analízis megalapozása” (1967), melyben a modern analízis nagy részét intuicionista alapokon újra felépítette. Olyan tételek konstruktivista változatát adta meg, mint amilyen a Stone–Weierstrass tétel, Hahn–Banach tétel, Hilbert tér beli önadjungált operátorok spektrál tétele, az absztrakt integrálok Lebesgue féle konvergencia tétele és olyan fogalmak intuicionista megfelelőit adta meg, mint a Haar mérték és a Fourier transzformáció.

IV. A „tertium non datur” bírálata

Az intuicionisták egyik alaptézise, hogy a klasszikus (realista) matematika érvénytelen következtetési formákat tartalmaz (pl.: $A \vee \neg A$, $\neg\neg A \to A$) és ezeket intuicionista (konstruktív) módszerekkel kell helyettesíteni.

Brouwer konstruált több „ellenpéldát”, amelyekben azt igyekszik kimutatni, hogy a kizárt harmadik elve nem univerzálisan érvényes. Pl.: legyen $G(n)$ igaz, ha n előáll két primszám összegeként és hamis különben. Ekkor nézzük a következő ($a_n \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}$) sorozatot: $a_0 = 1$ és

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} - (1/2)^n & \text{ha } \forall j \leq n\colon G(2j+2), \\ a_{n-1} & \text{ha } \exists k \leq n\colon \neg G(2k+2), \end{cases} \tag{1}$$

ez a sorozat jól definiált és Cauchy sorozat is, így egy α valós számot definiál. A sorozat definíciójából következik, hogy csak akkor tudjuk, hogy $\alpha = 0$ ha tudjuk, hogy mindig a definíció első fele az érvényes, tehát ha bebizonyítottuk a Goldbach sejtést. Hasonlóan $\alpha \neq 0$ -át is csak akkor tudnánk ha már cáfoltuk volna a sejtést, de ezidáig egyiket sem tette meg még senki, így $\neg\forall x \in \mathbb{R} : x = 0 \vee x \neq 0$. Tehát el kell vetnünk a kizárt harmadik elvét ha a valós számok effektív intuicionista definícióját fogadjuk el. Hasonló eszközökkel mutatta meg, hogy a valós számok teste nem vágható szét racionális és irracionális diszjunkt halmazokra (a függvény és a valós számok intuicionista definiciójával).

Pourciau álláspontja szerint az intuicionizmus egy kuhni értelemben vett tudományos forradalom lehetőségét hordozta magában, de főként történeti okokból elbukott. Egy másik cikkében – amit egy színdarab formájában írt meg – úgy érvel, hogy ha néhány nagyon egyszerű (szinte önevidensnek látszó) alapelvet elfogadunk a tudományos vizsgálatok alapelveiként, akkor ezekből már következik a intuicionizmus. Ezen elvek a következők:

(p1) Ismernünk kell egy állítás jelentését, mielőtt azt vizsgálnánk, hogy igaz-e;

(p2) Ne építsünk teljesen megalapozatlan feltevésekre;

(p3) Az egyszerűtől haladjuk a kevésbé egyszerű felé.

A matematika elsődlegességét a logikával szemben például (p1) és (p2) támasztja alá, a természetes számok axiomatizálása ellen a (p3) feltétel alapján lehet érvelni.

Dummett és később őt rekonstruálva *Prawitz* szemantikai alapokon érveltek az intuicionizmus mellett. Szerintük egy mondat jelentése nem választható el attól a kérdéstől, hogy hogyan alapozható meg a mondat igazsága. Dummett egy wittgensteiniánus jelentéselméletet védelmez, amely szerint a jelentést a használat határozza meg. Ez az elmélet legáltalánosabban talán úgy támasztható alá, hogy a jelentésnek közölhetőnek, a közlésnek pedig megfigyelhetőnek kell lennie. Egy más érv lehetne a nyelvtanulás érve, mely szerint egy nyelvet megtanulni annyit tesz, mint megtanulni egy bizonyos módon használni. Alkalmazva ezt a matematikára azt kapjuk, hogy egy matematikai állítás jelentése a bizonyítások által adott. Tehát az határozza meg egy állítás jelentését, hogy (j1) hogyan bizonyítható, valamint, (j2) hogyan viselkedik más állítások bizonyításakor. Ez a kétféle használat azonban konfliktusba kerülhet egymással: az eldönthetetlen állítások esetében. Ilyen esetekben (j1) használatnak van elsőbbsége. Tehát: ha el kívánjuk kerülni az ilyen konfliktushelyzeteket, akkor le kell cserélnünk a klasszikus logikát az intuicionistára.

V. Errores intuitionistarum

(e1) Véleményem szerint Husserl kritikája a logika pszichológiai megalapozására vonatkozóan (Logikai vizsgálódások) alkalmazható az intuicionizmus ellen is. A pszichológia nem alkalmas arra, hogy a logikát megalapozza, mivel nem tudja alátámasztani a logikai következtetések általános érvényét. A pszichologizmus szükségképpen szkepticizmushoz vezet, mivel a tudás szubjektumrelatívvá válik. Azonban ennek az episztemikus relativista szkepticizmusnak már a megfogalmazása ellentmond annak, ami szubjektíven vagy objektíven a saját igazságának feltétele (Jan Patocka szavaival).

(e2) Egy problémája az intuicionizmusnak, hogy mi biztosítja a matematika *interszubjektivitását.* Ha azt mondják, hogy „az a priori módon adott intuíció” akkor mégicsak elfogadnak valami tudásunktól függetlenül létező objektívat, ami egy realista állásponthoz vezet.

(e3) Kérdések (e2)-höz kapcsolódva: Mi korlátozza a szubjektumot abban, hogy valamit bebizonyítson (pl.: $A \wedge \neg A$)? Miért nem teljesen szabad a matematika? Mit is jelent pontosan az, hogy „megkonstruálni”?

(e4) A matematika a fizikai világra való „alkalmazhatóságával” is komoly gondok vannak az intuicionizmusnál, ha nem akarnak egy szolipszista álláspontra visszavonulni.

(e5) A nem-teljességi tételek is alkalmasak lehetnek az intuicionizmus kritikájára. A konstruktivisták azt állítják, hogy egy állítást csak akkor tarthatunk igaznak, ha konstruáltunk hozzá egy bizonyítást az elménkben, azonban Gödel nem-teljességi tételei éppen azt mutatják meg, hogy az igazság nem feleltethető meg a bizonyíthatóságnak egy effektíven axomatizálható elméletben.

Zárszó: „Az emberi elme számára ugyanis egyetlen tartható álláspont van csak: a platonizmus.” (Gödel)